This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SCHRIFTEN
FÜR INGENIEURE UND STUDIERENDE
HERAUSGEGEBEN VON E. JAHNKE
1

EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DES MAGNETISMUS

VON

R. GANS

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Mathematisch-physikalische Schriften

Phys 3409.08

Harvard College Library

FROM THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1842.)

SCIENCE CENTER LIBRARY

auf
oden.
mit
blich
ären,
rade
ende
nge-
iten
chen
eren
ysik
gkeit
haft-
artet
legt,
ich-
aft-
Dar-
stellung der einzelnen Gebiete wird so gehalten sein, daß jede ein abgeschlossenes Ganzes für sich bildet.

Schriften Jahnke. 30:608.

Bisher erschien Bändchen:

I. **Einführung in die Theorie des Magnetismus.** Von Privatdozent Dr. R. Gans in Tübingen. Mit 40 Textfiguren. [VI u. 110 S.] 1908.

Unter der Presse:

Funktionentafeln mit Formeln u. Kurven. Von Dr. E. Jahnke, Prof. a. d. Kgl. Bergakademie zu Berlin, und F. Emde, Ingenieur in Berlin.

Die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Von Dr. Cl. Schäfer, Privatdozent a. d. Universität Breslau.

Die Besselschen Funktionen. Von Dr. P. Schafheitlin, Prof. am Sophien-Realgymnasium zu Berlin.

Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. Von K. W. Wagner, Ingenieur in Charlottenburg.

In Vorbereitung:

Grundlagen des Schiffbaues. Von O. Alt, Dipl.-Ing. in Kiel.

Gastheorie. Von Dr. A. Byk, Privatdozent a. d. Universität und Technischen Hochschule zu Berlin.

Die mathematischen Instrumente. Von Dr. A. Galle, Professor am geodätischen Institut zu Potsdam.

Potentialtheorie. Von Privatdozent Dr. R. Gans in Tübingen.

Schwingungsprobleme. Von Dr. E. Grüneisen, Privatdozent a. d. Universität Berlin.

Die Vektoranalysis und ihre Anwendungen auf Elektrostatik und Elektrodynamik. Von Dr. W. v. Ignatowsky in Wetzlar.

Akustik. Von Dr. A. Kalähne, Prof. a. d. Technischen Hochschule zu Danzig.

Thermoelektrizität. Von Dr. F. Krüger, Privatdozent a. d. Universität Göttingen.

Konforme Abbildung. Von L. Lewent, Oberlehrer in Berlin.

Technische Hydromechanik. Von R. Edler von Mises, Ingenieur, Assistent a. d. k. k. Techn. Hochschule zu Brünn.

Die Grundlagen der Wechselstromtechnik. Von Prof. Dr. E. Orlich, Mitglied der physikal. techn. Reichsanstalt zu Berlin.

Die Fourierschen Reihen. Von Dr. R. Rothe, Privatdozent a. d. Technischen Hochschule zu Charlottenburg.

Die partiellen Differentialgleichungen. Von Dr. R. Rothe, Privatdozent a. d. Technischen Hochschule zu Charlottenburg.

Elektromagnetische Schwingungen. Von Dr. Ing. R. Rüdenberg, Assistent in Göttingen.

Die gewöhnlichen Differentialgleichungen der Technik. Von Dr. P. Schafheitlin, Prof. am Sophien-Realgymnasium zu Berlin.

Temperaturmessungen. Von Dr. S. Valentiner, Dozent a. d. Technischen Hochschule zu Hannover.

☞ Die Sammlung wird fortgesetzt.

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SCHRIFTEN
FÜR INGENIEURE UND STUDIERENDE
HERAUSGEGEBEN VON E. JAHNKE
1

EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DES MAGNETISMUS

VON

DR. RICHARD GANS
PRIVATDOZENTEN AN DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN

MIT 40 TEXTFIGUREN

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908

Phys 3409.08

HARVARD COLLEGE
JUN 6 1911
LIBRARY.

Haven Fund
(1, 8, 9, 10i. 2 11i.)

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Der Aufforderung des Herausgebers dieser Sammlung, ein Bändchen über Magnetismus zu schreiben, bin ich nachgekommen, da für ein solches Buch ein Bedürfnis vorzuliegen scheint.

Die ausgezeichneten Werke von du Bois, „Magnetische Kreise" und von Ewing, „Induktion in Eisen und verwandten Metallen" geben eine Fülle des wichtigsten Materials, welches für das Gebiet des Magnetismus in Betracht kommt; aber die Theorie ist nur skizziert und nur auf die einfachsten Fälle, häufig ohne Beweise, angewandt.

Der moderne Elektrotechniker verlangt mehr. Es ist zweifellos in der Technik der Wunsch vorhanden, die Maxwellsche Theorie eingehender zu beherrschen, als das bis jetzt der Fall war und als es bis jetzt nötig war. Symptome für dies Bestreben sieht man auf Schritt und Tritt.

Nun gibt es ja hervorragende moderne Lehrbücher, von E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, von M. Abraham, Die Theorie der Elektrizität, von H. Ebert, Magnetische Kraftfelder. Da die Verfasser dieser Werke sich aber viel weitergehende Ziele gesteckt haben, so sind ihre Bücher umfangreicher, obgleich für den Techniker sehr wichtige Gebiete, wie Ferromagnetismus, naturgemäß nur ganz kurz behandelt werden konnten. Dies Büchlein macht also nicht den Versuch, obige Werke zu verdrängen, sondern nur neben ihnen zu existieren und sie in gewisser Weise zu ergänzen.

Ich habe Wert darauf gelegt, die Ableitungen so elementar wie möglich zu gestalten; außer den Elementen der Differential- und Integralrechnung ist nichts vorausgesetzt. Trotzdem dürfte es im Interesse der leichteren Lektüre des Buches erwünscht — wenn auch nicht unbedingt erforderlich — sein, wenn der Leser sich mit den Grundlagen der Vektoranalysis vertraut macht; die Elemente dieser Rechenmethode sind in den Lehrbüchern über Vektorenrechnung von E. Jahnke, A. H. Bucherer, R. Gans und in der Einleitung des oben erwähnten Werkes von M. Abraham auseinandergesetzt.

Da das Buch einen gewissen Umfang nicht überschreiten sollte, konnte Vieles, und manchmal recht Wichtiges, überhaupt nicht behandelt werden; da es ferner als Einführung in die Theorie des Magnetismus gedacht ist, so mußte ich — wenn auch schweren Herzens — die schönen Untersuchungen von P. Weiß und W. Voigt über Krystallmagnetismus übergehen, mußte die interessanten und wichtigen Beziehungen des Magnetismus zur Elektronentheorie, die von W. Voigt, J. J. Thomson und P. Langevin aufgedeckt worden sind, beiseite lassen. Auch die Theorie der elastisch-magnetischen Wechselbeziehungen, die sogenannte Magnetostriktion, hätte nicht in den Rahmen dieses Büchleins gepaßt.

Die ersten drei Kapitel sind der magnetischen Feldstärke und Induktion gewidmet, erst im vierten Kapitel sind die Energieumsetzungen und Kräfte magnetischen Ursprungs behandelt, obwohl nur diese in letzter Linie der Messung zugänglich sind; doch ist dieses Vorgehen durch die Methoden von Faraday, Maxwell und ihrer Anhänger ja längst legitimiert und durch die große Vereinfachung der mathematischen Behandlung begründet.

Will man entsprechend den Bedürfnissen der Technik den permanenten Magnetismus nur als eine Spezialerscheinung des Elektromagnetismus auffassen, so muß man den Weg, den die Geschichte genommen hat, ganz verlassen; dann kommt das Coulombsche Gesetz erst ziemlich am Schluß einer systematischen Theorie des Magnetismus. Tatsächlich drängt alles dazu, das heutzutage zu tun. Die Magnetisierungskurve definiert eine Eisensorte, mit ihrer Hilfe sind aus den Maxwellschen Gleichungen die Erscheinungen der Permanenz abzuleiten, so verfährt in den einfachsten Fällen der praktische Magnetiker; dem hat sich auch der Theoretiker zu fügen, wenn er überhaupt die Absicht hat, sich den neuen Erscheinungen anzupassen.

Deshalb habe ich die Bedenken überwunden, welche einer so unhistorischen Darstellungsweise entgegentreten, und hoffe, dadurch in systematischer Beziehung und was die Anpassungsfähigkeit der Theorie an die Erfahrung betrifft, gewonnen zu haben.

Durch häufige Literaturangaben in Fußnoten möchte ich dem Leser die Anregung zum Studium der einschlägigen Originalabhandlungen geben.

Tübingen, März 1908. **R. Gans.**

Inhaltsverzeichnis.

1. Kapitel.

Die magnetische Feldstärke.

		Seite
1.	Die magnetische Feldstärke und ihre Messung	1
2.	Geometrische Darstellung des magnetischen Feldes	8
3.	Das magnetische Feld eines geradlinigen stromdurchflossenen Drahtes	4
4.	Die erste Maxwellsche Gleichung	6
5	Anwendungen der ersten Maxwellschen Gleichung	8

2. Kapitel.

Die magnetische Induktion in Körpern von konstanter Permeabilität.

6.	Das Induktionsgesetz; die zweite Maxwellsche Gleichung. Ballistische Meßmethode; der Webersche Erdinduktor	9
7.	Folgerungen aus den Maxwellschen Gleichungen	14
8.	Die Eindeutigkeit des Magnetfeldes	17
9.	Das magnetische Potential	19
10.	Das magnetische Potential eines geradlinigen Stroms i	21
11.	Das magnetische Potential linearer Ströme in Luft	22
12.	Die Tangentenbussole	25
13.	Das geradlinige Solenoid	26
14.	Körper von konstanter Permeabilität im magnetischen Felde. Die allgemeinen Gleichungen	30
15.	Die Grenzbedingungen	31
16.	Brechung der Induktionslinien	32
17.	Der vollkommene magnetische Kreis	32
18.	Der unvollkommene magnetische Kreis. Schlußjoch. Entmagnetisierung	33
19.	$\Delta V = 0$ in krummlinigen Koordinaten	39
20.	Kugel im gleichförmigen Felde	42
21.	Hohlkugel im gleichförmigen Felde. Schirmwirkung	44
22.	Verlängertes Rotationsellipsoid im gleichförmigen Felde	45

3. Kapitel.

Ferromagnetische Körper.

Seite

23. Die Permeabilität 50
24. Hysteresis 52
25. Bestimmung der Magnetisierungskurve 53
26. Die reversible Permeabilität und die wahre Magnetisierung . 57
27. Permanente Magnete 58
28. Das Feld spezieller permanenter Magnete. Der permanente vollkommene Kreis 63
29. Das permanent magnetisierte Rotationsellipsoid 64
30. Die (reversible) Permeabilität permanent magnetisierter Magnete 65
31. Der Stabmagnet. Magnetpole 66

4. Kapitel.

Magnetische Energie und Kräfte.

32. Das Energieprinzip 69
33. Die Arbeit der magnetischen Kräfte 73
34. Die Kräfte im magnetostatischen Felde 74
35. Die Gaußsche Methode 81
36. Die Kräfte auf polarisierbare starre Körper ohne wahren Magnetismus 83
37. Permeabilität von Flüssigkeiten. Steighöhenmethode . . . 90
38. Die Kräfte im elektromagnetischen Felde 91
39. Spezialisierungen. Kräfte auf polarisierbare Körper. Kräfte auf Ströme 95
40. Selbstinduktionskoeffizienten und wechselseitige Induktionskoeffizienten 100
41. Die Kräfte in einem geschlitzten Kreise. Die du Boissche Wage 102
42. Das ballistische Galvanometer 104

Kapitel I.

Die magnetische Feldstärke.

1. Die magnetische Feldstärke und ihre Messung. In der Umgebung eines elektrischen Stromes hat der Raum einen spezifischen Zustand, den man magnetisch nennt. Er äußert sich darin, daß auf ponderable Körper Kräfte ausgeübt werden, und daß in einem zweiten Leiter Ströme — sogenannte Induktionsströme — entstehen, wenn der elektrische Strom im ersten Leiter seine Stärke verändert oder die beiden Leiter gegeneinander bewegt werden.

Der Raum, als Träger solcher magnetischer Eigenschaften aufgefaßt, heißt ein magnetisches Feld.

In sehr großer (unendlich großer) Entfernung von allen elektrischen Strömen ist keine merkliche magnetische Eigenschaft mehr vorhanden.

Auf folgende Weise verschaffen wir uns ein quantitatives Maß der magnetischen Eigenschaft des Feldes: Einen Leitungsdraht biegen wir zu einer kleinen ebenen Windung von der Fläche σ, einer sogenannten Probespule, und verbinden die Enden der Zuleitungsdrähte mit einem ballistischen Galvanometer G. Der ganze so entstehende Stromkreis habe den Widerstand w. Das ballistische Galvanometer gibt einen Ausschlag, sobald eine Elektrizitätsmenge durch dasselbe hindurchfließt, und kehrt dann in seine Ruhelage zurück. Die Größe des Ausschlags ist proportional der hindurchgeflossenen Elektrizitätsmenge; das Galvanometer läßt sich — etwa indem man einen Kondensator von bekannter Kapazität und bekannter Potentialdifferenz durch das Galvanometer hin-

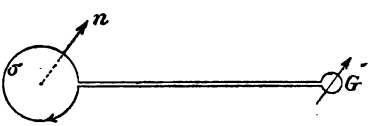

Fig 1.

durch entlädt — aichen, so daß einem bestimmten Ausschlag eine fest angebbare Elektrizitätsmenge entspricht. Auf die Theorie dieses Instruments werden wir später eingehend zurückkommen; die Wirkungsweise desselben ist jetzt schon oberflächlich erwähnt worden, damit wir magnetische Eigenschaften messen können.

Es zeigt sich, daß ein ballistischer Ausschlag entsteht, wenn man die Probespule plötzlich aus einer gegebenen Lage in eine unendlich große Entfernung von allen stromdurchflossenen Leitern bringt. Die durch das Galvanometer fließende Elektrizitätsmenge e ist ceteris paribus der Fläche σ der Probespule direkt und dem Widerstande w der Leitung umgekehrt proportional.

Läßt man den Anfangs*ort* der Probespule konstant, variiert aber die Stellung ihrer Ebene, die durch die Richtung der einen dauernd als positiv festgelegten Normalen n auf der Ebene angebbar ist, so ändert sich die Größe des Ausschlags. Wir suchen diejenige Stellung der Spulenebene, die beim plötzlichen Verschieben der Spule in unendlich große Entfernung den größten Ausschlag, also die größte fließende Elektrizitätsmenge e gibt; in diesem Falle setzen wir

$$e = \frac{\mathfrak{H}\sigma}{Vw}. \tag{1}$$

Die Größe $\mathfrak{H}$ ist dann nicht mehr von den Eigenschaften der Leitung, also z. B. von der Größe der Fläche σ oder vom Widerstande w abhängig, sondern nur noch von der Stärke und räumlichen Anordnung des elektrischen Stromes, der das Magnetfeld erzeugt. V ist eine universelle Konstante, die nur von der Wahl des Maßsystems abhängt.

Wir nennen $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke an dem betrachteten Orte.

Dreht man die Spule herum, so daß die Richtung der positiven Normalen gerade die entgegengesetzte wird, und zieht sie dann plötzlich aus dem Felde heraus, so wird der Ausschlag wieder ein maximaler, er hat aber das entgegengesetzte Vorzeichen, d. h. der durch die Probespule und das Galvanometer fließende Strom hat die entgegengesetzte Richtung wie vorher.

Wir wollen diejenige Stellung der Spule auszeichnen, in der der fließende Strom bei maximaler Stärke die Richtung des Pfeils in Fig. 1 hat. Diese Richtung ist dadurch gekennzeichnet, daß eine Drehung in Richtung des Stroms und eine Vorwärts-

bewegung in Richtung der positiven Normalen eine Rechtsschraubung ist.

Definitionsmäßig soll bestimmt werden, daß die Richtung der magnetischen Feldstärke die der positiven Normalen in dieser ausgezeichneten Lage sei.

Durch dieses Meßverfahren legen wir jedem Orte des Magnetfeldes eine Feldstärke $\mathfrak{H}$ von bestimmter Größe und Richtung bei; $\mathfrak{H}$ ist also ein Vektor.

Mißt man e und w in gleichem Maßsystem, z. B. im absoluten elektrostatischen, und σ in cm^2, und gibt man V den Wert $300 \cdot 10^8$, so ist $\mathfrak{H}$ nach absolutem Maß gemessen. $\mathfrak{H}$ hat also den Wert 1, wenn beim Entfernen einer Probespule von 1 cm^2 Querschnitt aus dem Felde die Elektrizitätsmenge $\frac{1}{300 \cdot 10^8}$ (in elektrostatischen Einheiten) ins Fließen kommt, vorausgesetzt, daß der Widerstand der Meßleitung 1 elektrostatische Einheit beträgt.

Diese Einheit der magnetischen Feldstärke nennt man 1 Gauß.

2. Geometrische Darstellung des magnetischen Feldes. Um uns ein magnetisches Feld geometrisch zu veranschaulichen, ziehen wir, von einem beliebigen Punkte anfangend, eine Kurve, deren Tangente in jedem Punkte die Richtung von $\mathfrak{H}$ hat; diese Kurve wird im allgemeinen doppelt gekrümmt sein. Ziehen wir sehr viele Linien dieser Art, indem wir immer andere und andere Anfangspunkte wählen, so haben wir bereits ein deutliches Bild von der jeweiligen Richtung des Vektors $\mathfrak{H}$ im Felde. Um auch die Größe von $\mathfrak{H}$ darzustellen, denken wir uns eine unendlich kleine Fläche $d\sigma$ an einem beliebigen Orte senkrecht zur Richtung von $\mathfrak{H}$ gestellt, und konstruieren so viele $\mathfrak{H}$-Linien auf dieser Fläche, wie das Produkt $\mathfrak{H} \cdot d\sigma$ angibt, d. h. wir zeichnen eine $\mathfrak{H}$-Linie auf der unendlich kleinen Flächeneinheit. Dann ist die Dichte der $\mathfrak{H}$-Linien ein Maß für die Größe des Vektors $\mathfrak{H}$.

Zwei verschiedene $\mathfrak{H}$-Linien können sich nicht schneiden, da im Schnittpunkte die Richtung von $\mathfrak{H}$ nicht mehr eindeutig wäre, was tatsächlich nie vorkommt.

Bezeichnen wir den absoluten Betrag von $\mathfrak{H}$, also die Größe der Feldstärke, mit $|\mathfrak{H}|$ und verfolgen wir ein $\mathfrak{H}$-Linienbündel, welches auf dem Flächenelement $d\sigma$ senkrecht steht, so werden unterwegs $\mathfrak{H}$-Linien im Bündel entspringen oder münden müssen, wenn das Produkt $|\mathfrak{H}| d\sigma$ nicht an allen Stellen des Bündels denselben Wert hat. Ist an einer bestimmten Stelle der Querschnitt

des Bündels $d\sigma'$ und die Feldstärke dort $\mathfrak{H}'$, und ist z. B.

$$|\mathfrak{H}'|d\sigma' > |\mathfrak{H}|d\sigma,$$

so stehen auf $d\sigma'$ mehr $\mathfrak{H}$-Linien senkrecht als auf $d\sigma$. Das ist aber nur möglich, wenn unterwegs, d. h. zwischen $d\sigma$ und $d\sigma'$, $\mathfrak{H}$-Linien im Innern des Bündels entsprungen sind.

3. Das magnetische Feld eines geradlinigen stromdurchflossenen Drahtes. Stationäre Ströme fließen immer in geschlossenen Bahnen. Spricht man von dem Magnetfelde eines geradlinigen, stromdurchflossenen Drahtes, so versteht man darunter, daß ein langes Stück der Leitung aus einem geradlinigen Draht bestehen soll, und daß man das Feld nur in Punkten P untersucht, die sehr weit von allen übrigen Teilen der geschlossenen Leitung entfernt sind (Fig. 2).

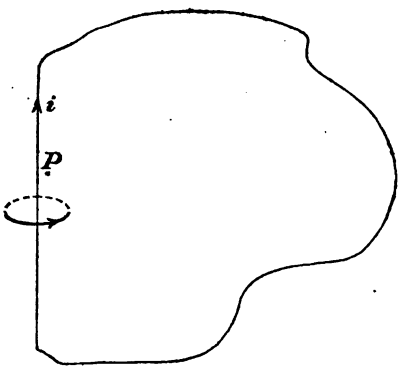

Fig. 2.

Messen wir die magnetische Feldstärke eines solchen geradlinigen stromdurchflossenen Drahtes nach dem in Nr. 1 beschriebenen Verfahren, so zeigt sich, daß die $\mathfrak{H}$-Linien Kreise sind, deren Ebenen senkrecht zur Drahtachse stehen, und deren Mittelpunkte auf der Drahtachse liegen, und zwar ist eine Drehung in der Richtung von $\mathfrak{H}$ und eine Vorwärtsbewegung in Richtung des Stromes eine Rechtsschraubung.

Ferner ergibt sich, daß die Größe der Feldstärke umgekehrt proportional dem Abstande von der Drahtachse und direkt proportional der Stromstärke i' ist. Es ist also

$$|\mathfrak{H}| = C\frac{i'}{r}.$$

Die Konstante C ist nach den Festsetzungen der Nr. 1 nicht mehr willkürlich, sondern hat erfahrungsgemäß den Wert $2/V$, wo V die universelle Konstante $300 \cdot 10^8$ ist, wenn man i' nach elektrostatischem Maße mißt. Also haben wir

$$|\mathfrak{H}| = \frac{2i'}{Vr}. \tag{2}$$

Multiplizieren wir $|\mathfrak{H}|$ mit der Länge $2r\pi$ der $\mathfrak{H}$-Linie, so ergibt sich

$$|\mathfrak{H}|\,2r\pi = \frac{4\pi i'}{V}.$$

Diese Formel gilt allgemeiner: Wir legen eine beliebige geschlossene Kurve s so, daß sie den geradlinigen Draht einmal umschlingt, und bilden das Linienintegral $\int \mathfrak{H}_s ds$, d. h. wir multiplizieren jedes Linienelement ds der Kurve mit der in seine Richtung fallenden Komponente des Magnetfeldes am betreffenden Orte. Da

$$\mathfrak{H}_s ds = |\mathfrak{H}|\, ds \cdot \cos(\mathfrak{H}, ds)$$

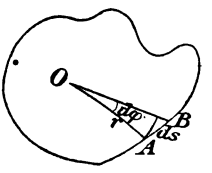

Fig. 3.

ist, so kann man statt dessen auch ds auf die Richtung von $\mathfrak{H}$ projizieren und mit $|\mathfrak{H}|$ multiplizieren. Diese Projektion $ds\cos(\mathfrak{H},ds)$ ist aber $r\,d\varphi$, wenn r den Abstand des Elements ds von der Drahtachse O bezeichnet und $d\varphi$ der Winkel ist, den die beiden durch die Drahtachse und den Anfang resp. das Ende von ds gelegten Ebenen OA resp. OB miteinander bilden (Fig. 3).

Benutzen wir (2), so folgt

$$\int \mathfrak{H}_s ds = \int \frac{2i'}{Vr}\, r\,d\varphi = \frac{2i'}{V}\int d\varphi.$$

Da nun bei einem Umlauf φ von 0 bis 2π wächst, so ergibt sich

$$\int \mathfrak{H}_s ds = \frac{4\pi i'}{V}. \tag{3}$$

Wenn dagegen die Kurve s die Drahtachse nicht umschlingt, so wird $\int d\varphi = 0$, weil die Werte von φ nur von der Anfangsstelle A (Fig. 4) über C bis B wachsen, aber beim weiteren Durchlaufen der Kurve von B über D bis A wieder bis zum Anfangswert abnehmen. Für eine solche Kurve gilt also

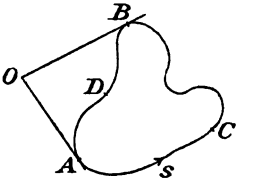

Fig. 4.

$$\int \mathfrak{H}_s ds = 0. \tag{3a}$$

4. Die erste Maxwellsche Gleichung. Die Formel (3), welche für einen geradlinigen Draht abgeleitet worden ist, gilt ganz allgemein für stationäre Ströme, auf deren Behandlung wir uns im wesentlichen beschränken wollen.

(3) heißt die erste Maxwellsche Gleichung in der Integralform für den Fall stationärer Ströme.

Um den lästigen Faktor V zu eliminieren, setzen wir

$$\frac{i'}{V} = i;$$

i heißt dann die elektromagnetisch gemessene Stromstärke. Die in der Technik übliche „praktische Einheit" für Stromstärken 1 Ampère ist $^1/_{10}$ der elektromagnetisch gemessenen Stromstärke 1.

Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke über eine beliebige geschlossene Kurve ist also gleich dem 4πfachen der (elektromagnetisch gemessenen) Stromstärke sämtlicher Ströme, die von der Kurve umzingelt werden.

Im elektromagnetischen Maßsystem lautet (3) also

$$\int \mathfrak{H}_s ds = 4\pi i, \tag{3'}$$

im praktischen Maßsystem

$$\int \mathfrak{H}_s ds = \frac{4\pi}{10} J, \tag{3''}$$

wo J die Zahl der Ampères bedeutet.

Im elektromagnetischen absoluten Maßsystem ist die Dimension von i durch die Gleichung gegeben

$$[i] = [\mathrm{cm}^{1/2}\ \mathrm{gr}^{1/2}\ \mathrm{sec}^{-1}].$$

Nach (3') ist also die Dimension von $\mathfrak{H}$

$$[\mathfrak{H}] = \frac{[i]}{[\mathrm{cm}]} [\mathrm{cm}^{-1/2}\ \mathrm{gr}^{1/2}\ \mathrm{sec}^{-1}].$$

Die Einheit der magnetischen Feldstärke, also $1\ [\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}]$, heißt, wie in Nr. 1 erwähnt wurde, 1 Gauß.

Die Maxwellsche Gleichung ist offenbar von einem Koordinatensystem ganz unabhängig, da zu ihrer Formulierung überhaupt kein Koordinatensystem benutzt wurde, aber rechnerisch ist die Anwendung eines solchen häufig von großem Nutzen, deshalb

soll die Gleichung (3′) jetzt z. B. in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten abgeleitet werden.

Das Koordinatensystem sei ein Rechtssystem, d. h. eine Drehung der x-Achse auf kürzestem Wege in die Richtung der y-Achse und eine Vorwärtsbewegung in Richtung der z-Achse soll eine Rechtsschraubung sein.

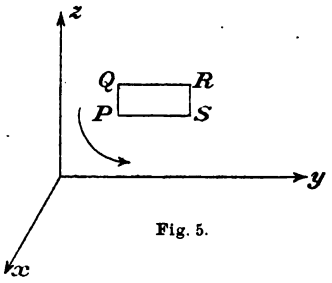

Fig. 5.

Als geschlossene Kurve wählen wir (Fig. 5) ein unendlich kleines Rechteck mit den Seiten dy und dz, dessen Ebene senkrecht zur x-Achse liege. Der eine Eckpunkt P habe die Koordinaten y, z; bei ihm beginne die Integration und folge der Pfeilrichtung. Die Seite PS liefert zum Linienintegral den Beitrag $\mathfrak{H}_y dy$. SR liefert den Beitrag $\mathfrak{H}_z dz$, aber $\mathfrak{H}_z$ ist an der Stelle $y + dy$, und nicht an der Stelle y zu nehmen; deshalb schreiben wir $(\mathfrak{H}_z)_{y+dy} dz$. RQ und QP liefern die Beiträge $-(\mathfrak{H}_y)_{z+dz} dy$ resp. $-\mathfrak{H}_z dz$, so daß wir im ganzen haben

$$\int \mathfrak{H}_s ds = \mathfrak{H}_y dy + (\mathfrak{H}_z)_{y+dy} dz - (\mathfrak{H}_y)_{z+dz} dy - \mathfrak{H}_z dz.$$

Die Entwicklung nach dem Taylorschen Satz ergibt

$$(\mathfrak{H}_z)_{y+dy} = \mathfrak{H}_z + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} dy,$$

also wird aus unserer Formel

$$\int \mathfrak{H}_s ds = \mathfrak{H}_y dy + \mathfrak{H}_z dz + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} dz\, dy - \mathfrak{H}_y dy - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} dy\, dz - \mathfrak{H}_z dz$$

$$= \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}\right) dy\, dz.$$

Durch das Rechteck $dy\, dz$ wird nur ein unendlich kleiner Strom fließen, da die Stromdichte $\mathfrak{J}$ endlich ist. Unter der Stromdichte verstehen wir einen Vektor, dessen Richtung mit der des Stromes zusammenfällt, und dessen Größe diejenige Stromstärke ist, welche durch eine unendlich kleine, senkrecht zu dieser Richtung stehende Flächeneinheit fließt.

Die durch das Rechteck $dy\, dz$ (Fig. 6) hindurchfließende Stromstärke di ist $|\mathfrak{J}|\, d\sigma$, wo $d\sigma$ der Querschnitt des in der üblichen

Weise (vgl. Nr. 2) konstruierten $\mathfrak{J}$-Linienbündels ist, welches das Rechteck $dy\,dz$ durchsetzt. Nun ist aber $d\sigma = dy\,dz \cos(\mathfrak{J}, x)$, da $\mathfrak{J}$ senkrecht auf $d\sigma$ und x senkrecht auf $dy\,dz$ steht, also ist

$$di = |\mathfrak{J}|d\sigma = |\mathfrak{J}| \cos(\mathfrak{J}x)\,dy\,dz = \mathfrak{J}_x\,dy\,dz.$$

So wird aus (3′)

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} = 4\pi \mathfrak{J}_x. \tag{4}$$

Ebenso wähle man unendlich kleine Rechtecke senkrecht zur y- resp. z-Achse; dann folgen zwei weitere Gleichungen, die durch zyklische Vertauschung der Buchstaben xyz aus (4) hervorgehen. Sie lauten

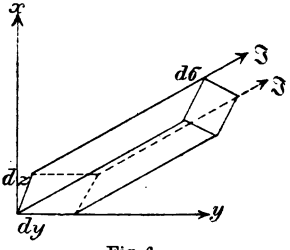

Fig. 6.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} = 4\pi \mathfrak{J}_y \\ \dfrac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} = 4\pi \mathfrak{J}_z. \end{cases} \tag{4}$$

Die Gleichungen (4) bilden das erste Tripel der Maxwellschen Gleichungen für stationäre Ströme in der Differentialform. Die Systeme (3′) und (4) sind einander vollkommen äquivalent.

Die linken Seiten von (4) sind Komponenten eines Vektors, den man rot $\mathfrak{H}$ (sprich: Rotation $\mathfrak{H}$) nennt; (4) lautet also in Vektorschreibweise

$$\text{rot}\,\mathfrak{H} = 4\pi \mathfrak{J}. \tag{4′}$$

5. Anwendung der ersten Maxwellschen Gleichung. Formel (3′) beansprucht allgemeine Gültigkeit, also auch z. B. im Innern eines geradlinigen stromdurchflossenen Drahtes, wo das Feld nach Nr. 1 nicht meßbar ist; hier ist es eben durch (3′) definiert.

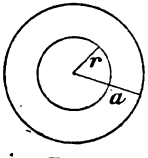

Fig. 7.

Hat ein geradliniger Draht den Radius a, so kann man den Strom i_r, der durch einen Kreis vom Radius r fließt (Fig. 7), berechnen, wenn man berücksichtigt, daß der Strom i gleichförmig über den Querschnitt verteilt ist; es ist dann

$$i_r : i = r^2\pi : a^2\pi. \tag{5}$$

Da $\mathfrak{H}$ aus Symmetriegründen peripherisch um die Drahtachse

verläuft, so folgt aus (3′) mit Berücksichtigung von (5)

$$|\mathfrak{H}|\,2r\pi = 4\pi i_r = 4\pi\frac{ir^2}{a^2}, \tag{6}$$

also

$$\mathfrak{H} = \frac{2ir}{a^2}, \tag{7}$$

während nach (2) außerhalb des Drahtes $\mathfrak{H} = \frac{2i}{r}$ ist. (In (2) ist $\frac{i'}{V}$ nach Nr. 4 durch i ersetzt.) Auf der Oberfläche des Drahtes, d. h. für $r = a$ gehen beide Formeln ineinander über.

Das Feld eines geschlossenen Solenoids. Auf einen Ring, den wir uns durch Rotation einer beliebigen ebenen Figur um eine außerhalb derselben, aber in derselben Ebene gelegene Achse entstanden denken, sei eine enge Spirale aus N Windungen Leitungsdraht gleichmäßig gewickelt. Da jede $\mathfrak{H}$-Linie wegen (3′) wenigstens einmal mit dem Leitungsdraht verschlungen sein muß, und da die $\mathfrak{H}$-Linien aus Symmetriegründen Kreise bilden müssen, deren Ebenen senkrecht zur Rotationsachse des Ringes und deren Mittelpunkte auf der Rotationsachse liegen, so folgt, daß alle $\mathfrak{H}$-Linien im Innern des Ringes sich befinden. Da $|\mathfrak{H}|$ längs eines solchen Kreises aus Symmetriegründen konstant ist, so ergibt (3′), daß im Abstande r von der Achse

$$2r\pi\,|\mathfrak{H}| = 4\pi Ni$$

ist, denn Ni ist der Gesamtstrom, der den Kreis vom Radius r durchsetzt. Also ist

$$|\mathfrak{H}| = \frac{2Ni}{r}. \tag{8}$$

Außerhalb des Ringes ist das Feld in Strenge Null.

Variiert r nicht stark für die verschiedenen Punkte im Innern des Ringes, d. h. ist der Ring dünn gegen die Abstände seiner Punkte von der Rotationsachse, so ist $\mathfrak{H}$ im Innern annähernd konstant.

Kapitel II.

Die magnetische Induktion in Körpern von konstanter Permeabilität.

6. Das Induktionsgesetz; die zweite Maxwellsche Gleichung. In Nr. 2 haben wir das Vektorfeld $\mathfrak{H}$ geometrisch dar-

gestellt. Wir fragen jetzt, wie viele $\mathfrak{H}$-Linien durch eine beliebige Fläche σ mit der einen willkürlich als positiv gewählten Normalenrichtung n hindurchgehen. Wir legen ein Flächenelement $d\Sigma$ senkrecht zur Richtung von $\mathfrak{H}$; nach Nr. 2 durchsetzen dieses $|\mathfrak{H}|\,d\Sigma$ $\mathfrak{H}$-Linien.

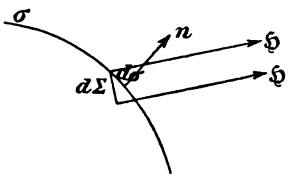

Fig. 8.

Alle diese Linien gehen auch durch das Flächenelement $d\sigma$ hindurch, welches durch die vom Rande von $d\Sigma$ ausgehenden $\mathfrak{H}$-Linien aus σ ausgeschnitten wird, und es ist nach Fig. 8

$$d\Sigma = d\sigma \cos(n, \mathfrak{H}).$$

Durch das Element $d\sigma$ gehen also

$$|\mathfrak{H}|\,d\Sigma = |\mathfrak{H}| \cos(n, \mathfrak{H})\,d\sigma = \mathfrak{H}_n d\sigma$$

$\mathfrak{H}$-Linien. Die Gesamtzahl $\mathfrak{H}$-Linien, welche die ganze Fläche σ durchsetzen, beträgt demnach

$$\int_\sigma \mathfrak{H}_n d\sigma.$$

Dabei sind von selbst diejenigen $\mathfrak{H}$-Linien als negativ gezählt, die von der Seite der positiven zur Seite der negativen Normalen durch σ hindurchtreten, da bei diesen $\cos(n, \mathfrak{H})$ negativ ist.

Kann man durch eine geschlossene Kurve s eine beliebige Fläche σ legen, die nur der Bedingung genügt, daß sie vollkommen in Luft verläuft, so sagt das von Faraday gefundene Gesetz der elektromagnetischen Induktion aus, daß das Linienintegral der elektrischen Feldstärke längs der Kurve s in jedem Augenblick proportional der Geschwindigkeit ist, mit der die Zahl der durch σ hindurchtretenden $\mathfrak{H}$-Linien sich ändert. Messen wir die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ im elektromagnetischen Maßsystem, so ist anstatt „proportional" „gleich" zu setzen. Dieser Satz lautet in Formel

$$-\int \mathfrak{E}_s\,ds = \frac{d}{dt}\int \mathfrak{H}_n\,d\sigma. \tag{9}$$

Auf der linken Seite muß das Minuszeichen stehen, wenn der Umlaufsinn von s und die Richtung der positiven Normalen n wie immer so gewählt sind, daß sie eine Rechtsschraubung bilden.

Die Strömung oder Stromdichte $\mathfrak{J}$ steht mit der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ in einem homogenen Drahte in der Beziehung

$$\mathfrak{J} = \lambda \mathfrak{E}, \tag{10}$$

wenn λ die (elektrische) Leitfähigkeit des Drahtes bedeutet. Ist σ sein Querschnitt, so ist wegen (10)

$$\int \mathfrak{E}_s ds = \int \frac{|\mathfrak{J}|}{\lambda} ds = \int \frac{|\mathfrak{J}|\sigma}{\lambda\sigma} ds, \tag{11}$$

oder da $|\mathfrak{J}|\sigma = i$ für jeden Querschnitt denselben Wert hat,

$$\int \mathfrak{E}_s ds = i \int \frac{ds}{\lambda\sigma} = iw; \tag{11'}$$

$w = \int \frac{ds}{\lambda\sigma}$ heißt der galvanische Widerstand des Drahtes.

Nach dem Ohmschen Gesetz ist also das Linienintegral der elektrischen Feldstärke gleich der elektromotorischen Kraft im Leitungsdraht.

Bis jetzt haben wir die Beschränkung eingeführt, daß die Fläche σ der Formel (9) vollständig in Luft verlaufen muß; Gleichung (9) würde auch nicht mehr richtig sein, wenn wir diese Beschränkung fallen ließen, denn wir haben schon eine Festsetzung über die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ im Innern anderer Körper getroffen, indem wir die erste Maxwellsche Gleichung (3') als überall gültig angesehen haben (vgl. besonders die erste Anwendung derselben in Nr. 5).

Gleichung (9) ist nun allgemein richtig, gleichgültig ob σ durch Luft oder irgendwelche andere Materialien geht, wenn wir anstatt der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ rechts einen neuen Vektor, die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$, setzen, so daß wir erhalten

$$-\int \mathfrak{E}_s ds = \frac{d}{dt} \int \mathfrak{B}_n d\sigma, \tag{12}$$

und das ist die zweite Maxwellsche Gleichung in der Integralform.

Der Vektor $\mathfrak{B}$, der auch Kraftliniendichte oder magnetische Erregung genannt wird, ist streng genommen nur im Vakuum gleich und gleichgerichtet der Feldstärke $\mathfrak{H}$, praktisch aber auch in Luft. In sehr vielen Materialien ist

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \tag{13}$$

wo μ eine Konstante des Materials ist, welche Permeabilität oder Magnetisierungskonstante heißt; d. h. $\mathfrak{B}$ ist mit $\mathfrak{H}$ gleichgerichtet und steht in einem fest angebbaren, vom Material abhängigen Verhältnis zu $\mathfrak{H}$.

μ ist immer positiv. Ist $\mu > 1$, so heißt der Körper paramagnetisch, ist $\mu < 1$, so heißt er diamagnetisch.

In Kristallen ist $\mathfrak{B}$ eine lineare Vektorfunktion von $\mathfrak{H}$, d. h. es gelten die Beziehungen

$$(13') \qquad \begin{cases} \mathfrak{B}_x = \mu_{11}\mathfrak{H}_x + \mu_{12}\mathfrak{H}_y + \mu_{13}\mathfrak{H}_z \\ \mathfrak{B}_y = \mu_{21}\mathfrak{H}_x + \mu_{22}\mathfrak{H}_y + \mu_{23}\mathfrak{H}_z \\ \mathfrak{B}_z = \mu_{31}\mathfrak{H}_x + \mu_{32}\mathfrak{H}_y + \mu_{33}\mathfrak{H}_z , \end{cases}$$

wo $\mu_{ik} = \mu_{ki}$ ist. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ haben dann also nicht dieselbe Richtung.

In den sogenannten ferromagnetischen Körpern schließlich, wie Eisen, Stahl, Nickel, Kobalt und einigen Legierungen ist $\mathfrak{B}$ nicht in einfacher Weise mit $\mathfrak{H}$ verbunden, ja $\mathfrak{B}$ ist sogar nicht einmal durch den augenblicklichen Wert von $\mathfrak{H}$ bestimmt, sondern hängt mit von früheren $\mathfrak{H}$-Werten ab, so daß nicht einmal die Richtung von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ miteinander übereinzustimmen brauchen.

Auf diese ferromagnetischen Materialien, die in der Elektrotechnik eine große Rolle spielen, kommen wir noch eingehend zurück.

Die Größe $\frac{\mu - 1}{4\pi}$ bezeichnet man gewöhnlich durch den Buchstaben $\varkappa$; $\varkappa$ heißt die (magnetische) Suszeptibilität. Nach dem Obigen ist $\varkappa$ für $\left\{\begin{matrix}\text{para}\\ \text{dia}\end{matrix}\right\}$magnetische Substanzen $\gtrless 0$.

Suszeptibilität $\varkappa$ bei 18^0.[1])

Wismut . .	$-14 \cdot 10^{-6}$	Wasser	$-0{,}755 \cdot 10^{-6}$
Gold	$-2{,}8 \cdot 10^{-6}$	Vakuum	0,00
Quecksilber	$-2 \cdot 10^{-6}$	Luft (1 Atm.) . . .	$+0{,}027 \cdot 10^{-6}$
Silber . . .	$-1{,}7 \cdot 10^{-6}$	Sauerstoff (1 Atm.)	$+0{,}12 \cdot 10^{-6}$
Kupfer . .	$-1{,}0 \cdot 10^{-6}$	Platin	$+25 \cdot 10^{-6}$
Zink	$-0{,}8 \cdot 10^{-6}$	Palladium	$+55 \cdot 10^{-6}$

$\mathfrak{Z} = \int \mathfrak{B}_n d\sigma$ nennt man den Induktionsfluß (Kraftlinienfluß) durch die Fläche σ.

1) Vgl. F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 9. Aufl., Leipzig und Berlin 1901, Tab. 36a.

In genau derselben Weise, wie aus (3′) die Gleichungen (4) folgten (Nr. 4), läßt sich aus (12) das System ableiten:

$$(14)\qquad \begin{cases} -\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}\right) = \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial t} \\ -\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}\right) = \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial t} \\ -\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y}\right) = \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial t}; \end{cases}$$

es heißt das zweite Tripel der Maxwellschen Gleichungen.

In Vektorschreibweise lautet es:

$$(14')\qquad -\operatorname{rot} \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}.$$

Bei der Messung der Feldstärke in Nr. 1 haben wir Formel (12) resp. (9) benutzt. Ist die Feldstärke $\mathfrak{H}$ im Bereiche der kleinen Probespule als räumlich gleichförmig anzusehen, so ist

$$\int \mathfrak{H}_n d\sigma = \mathfrak{H}_n \sigma .$$

Wegen (9) und (11′) ist

$$i = -\frac{1}{w}\frac{d}{dt}(\mathfrak{H}_n \sigma).$$

Zur Zeit t_1 beginne man mit der Bewegung der Spule, zur Zeit t_2 befinde dieselbe sich im Felde Null, dann ist die durch das Galvanometer fließende Elektrizitätsmenge nach der letzten Gleichung

$$(15)\qquad e = \int_{t_1}^{t_2} i\,dt = -\frac{1}{w}\left[\mathfrak{H}_n \sigma\right]_{t_1}^{t_2} = +\frac{\mathfrak{H}_n \sigma}{w}.$$

Diese Formel enthält das Prinzip der ballistischen Messung magnetischer Feldstärken.[1])

Der Webersche Erdinduktor. Eine Spule aus N Windungen der Fläche σ sei im magnetischen Felde der Erde so auf-

1) Die Ableitung der Formel (15) ist nicht streng, da der Einfluß der Selbstinduktion des Leiters nicht berücksichtigt worden ist (siehe unten), das Resultat ist aber genau richtig.

gestellt, daß die eine Flächennormale n im magnetischen Meridian horizontal gerichtet sei und zwar von Süden nach Norden. Diese Spule ist mit einem ballistischen Galvanometer verbunden. Der Induktionsfluß durch die Spule ist $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{H}_n N\sigma = |\mathfrak{H}| \cos i \cdot N\sigma$, wenn i die magnetische Inklination, d. h. den Winkel bedeutet, den die erdmagnetische Feldstärke mit der Horizontalen bildet. $|\mathfrak{H}| \cos i = H$ bezeichnet man als Horizontalintensität der erdmagnetischen Feldstärke. Dreht man plötzlich die Fläche des Erdinduktors um 180^0, so daß die positive Normale wiederum horizontal, aber nach Süden weist, so ist jetzt der Induktionsfluß

$$\mathfrak{Z}_2 = -HN\sigma,$$

also folgt

$$e = \frac{1}{w}(\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2) = \frac{2HN\sigma}{w}. \tag{16}$$

Mittels des Erdinduktors und eines geaichten ballistischen Galvanometers läßt sich also H bestimmen.

7. Folgerungen aus den Maxwellschen Gleichungen. 1) Da die linke Seite der Gleichung (3′)

$$\int \mathfrak{H}_s ds = \sum 4\pi i = 4\pi \int \mathfrak{J}_n d\sigma$$

unabhängig von der Form der Fläche σ ist, wenn diese nur s zur Randkurve hat, so ist

$$\int_{\sigma_1} \mathfrak{J}_n d\sigma = \int_{\sigma_2} \mathfrak{J}_n d\sigma. \tag{17}$$

Da σ_1 und σ_2 (Fig. 9) zusammen eine geschlossene Fläche bilden, so bedeutet (17), daß die Strömung, die in eine geschlossene Fläche eintritt, immer Null ist. Das entspricht auch der Anschauung, daß das Flächenintegral der Strömung gleich der Elektrizitätsmenge ist, welche durch die Fläche in der Zeiteinheit hindurchtritt; würde mehr Elektrizität ins Innere der Fläche hineinfließen als aus ihr heraustritt, so würde eine dauernde Anhäufung von Elektrizität im Innern stattfinden, und der Zustand könnte nicht, wie wir immer voraussetzen wollen, stationär sein.

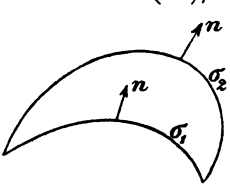

Fig. 9.

2) Da Gleichung (12) für jede Fläche σ gelten soll, die durch s gelegt werden kann, so folgt (Fig. 9)

$$\frac{d}{dt}\int_{\sigma_1}\mathfrak{B}_n d\sigma = \frac{d}{dt}\int_{\sigma_2}\mathfrak{B}_n d\sigma, \tag{18}$$

oder wenn man die durch σ_1 und σ_2 gebildete geschlossene Fläche σ nennt und ihre äußere Normale überall als positiv wählt, so daß in (18) das Vorzeichen von $\mathfrak{B}_n$ auf σ_1 umgekehrt werden muß,

$$\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n d\sigma = 0$$

für jede geschlossene Fläche.

$\int \mathfrak{B}_n d\sigma$, die Zahl der Induktionslinien, welche aus einer beliebigen geschlossenen Fläche herauskommt, ist zeitlich konstant. Diese Konstante ist aber Null, da aus keiner Fläche eines Materials $\mathfrak{B}$-Linien herauskommen, welches noch nie magnetischen Einwirkungen unterworfen worden ist. Es ist also

$$\int \mathfrak{B}_n d\sigma = 0 \tag{19}$$

für jede geschlossene Fläche. Nirgends können demnach $\mathfrak{B}$-Linien entspringen oder münden, denn umgibt man eine Stelle, an der $\mathfrak{B}$-Linien entspringen (münden), mit einer Fläche σ, so wäre auf dieser Fläche das Integral (19) $\gtrless 0$. Die $\mathfrak{B}$-Linien verlaufen also in geschlossenen Bahnen, oder $\mathfrak{B}$ ist, wie man sagt, ein solenoidaler Vektor.

3) Differentiiert man die erste Gleichung (14) nach x, die zweite und dritte nach y resp. z und addiert sie dann, so ergibt sich links identisch null, also folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z}\right) = 0,$$

oder in Vektorschreibweise

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0,$$

d. h. div $\mathfrak{B}$ (sprich: Divergenz $\mathfrak{B}$) ist zeitlich konstant.

Da vor irgendeiner magnetischen Einwirkung $\mathfrak{B}$ sicher Null war, so ist die Konstante Null, also ist

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0. \tag{20}$$

4) Gleichung (20) ist nur ein anderer Ausdruck für den Inhalt von (19); denn wählt man in (19) als spezielle geschlossene Fläche die Oberfläche eines unendlich kleinen rechtwinkligen Parallelepipeds mit den Kanten $dx\,dy\,dz$ parallel den Koordinatenachsen, so gibt die linke Seitenfläche (Fig. 10), deren äußere Normale die Richtung $-x$ hat, zu $\int \mathfrak{B}_n d\sigma$ den Beitrag $-\mathfrak{B}_x\,dy\,dz$, während die rechte Seitenfläche den Beitrag $+(\mathfrak{B}_x)_{x+dx}\,dy\,dz$ liefert. Es ist dabei beachtet, daß die linke Seitenfläche bei der Koordinate x, die rechte bei der Koordinate $x+dx$ liegt. Entwickelt man $(\mathfrak{B}_x)_{x+dx}$ nach dem Taylorschen Satze und addiert die Beiträge der linken und rechten Seitenflächen, so erhält man

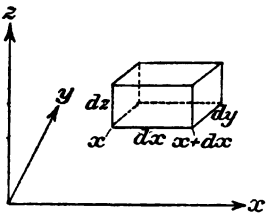

Fig. 10.

$$-\mathfrak{B}_x\,dy\,dz + \left(\mathfrak{B}_x + \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz = \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Fügt man hierzu die Terme, welche die vordere und hintere, resp. untere und obere Seitenfläche liefern, so entsteht

$$\int \mathfrak{B}_n d\sigma = \left(\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz. \tag{21}$$

Dieser Ausdruck muß nach (19) verschwinden; das ist nur möglich, wenn (20) gilt.

div $\mathfrak{B}$ ist nach (21) also das Oberflächenintegral des Vektors $\mathfrak{B}$ über die Oberfläche einer unendlich kleinen Volumeinheit.

Im absoluten elektromagnetischen Maßsystem ist die Dimension der Induktion gleich der einer Feldstärke, da μ als reine Zahl angesehen wird, also

$$[\mathfrak{B}] = [\mathfrak{H}] = [\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}], \quad \text{vgl. Nr. 4.}$$

Der Induktionsfluß hat die Dimension

$$[\mathfrak{Z}] = [\mathfrak{B}]\,[\sigma] = [\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}], \quad \text{vgl. Nr. 6;}$$

ferner ist

$$[\mathfrak{J}] = \frac{[i]}{[\sigma]} = [\mathrm{cm}^{-3/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}]$$

$$[e] = [i]\,[t] = [\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}], \quad \text{vgl. (15)}$$

$$[w] = \frac{[\mathfrak{B}]}{[e]} = [\mathrm{cm}^1\,\mathrm{sec}^{-1}], \qquad \text{vgl. (16)}$$

$$[\lambda] = \frac{[l]}{[\sigma][w]} = [\mathrm{cm}^{-2}\,\mathrm{sec}^1], \qquad \text{vgl. (11')}.$$

Die Einheit des Induktionsflusses heißt auch 1 Maxwell.

Die technische Einheit der Elektrizitätsmenge ist 1 Coulomb, und zwar ist 1 Coulomb = 0,1 abs. Einh.

Die technische Einheit des Widerstandes ist 1 Ohm, und zwar ist 1 Ohm = 10^9 abs. Einh.

Die technische Einheit einer elektromotorischen Kraft ist 1 Volt, und zwar ist 1 Volt = 10^8 abs. Einh.

8. Die Eindeutigkeit des Magnetfeldes. Es soll bewiesen werden, daß es in einem beliebigen Raume S mit der Oberfläche σ nur ein stationäres Magnetfeld gibt, welches folgenden Bedingungen genügt:

I. (3') $\qquad \int \mathfrak{H}_s\, ds = 4\pi i$

für jede geschlossene Kurve s in S;

II. (19) $\qquad \int \mathfrak{B}_n\, d\sigma = 0$

für jede geschlossene Fläche σ, die ganz und gar in S liegt.

III. $\mathfrak{B}_n$ ist auf der Oberfläche σ des Raumes S gegeben. Natürlich darf $\mathfrak{B}_n$ nicht ganz willkürlich auf der Oberfläche des Raumes gegeben sein, sondern auf der geschlossenen Oberfläche muß immer die Gleichung (19) erfüllt sein.

Es ist also behauptet, daß das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ durch die Stromverteilung und die durch die Oberfläche in den Raum eintretenden $\mathfrak{B}$-Linien eindeutig gegeben ist.

Für den unendlichen Raum wollen wir die Bedingung stellen, daß keine $\mathfrak{H}$-Linien ins Unendliche laufen oder aus dem Unendlichen kommen, d. h. $\int \mathfrak{H}_n\, d\sigma$ muß für jeden Teil einer unendlich großen Kugelfläche vom Radius R verschwinden. Sei $d\omega$ das Element des körperlichen Winkels, unter dem ein Element $d\sigma$ der Kugelfläche vom Kugelzentrum aus erscheint, so daß $d\sigma = R^2\, d\omega$ ist, so muß $\int \mathfrak{H}_n R^2\, d\omega$, über jeden Teil der unendlichen Kugel integriert, verschwinden. Da aber $\int d\omega$ immer endlich bleibt, so muß $\mathfrak{H}_n R^2$ verschwinden. Das ist aber der Fall, wenn $\mathfrak{H}$ im Un-

endlichen Null wird wie $1/R^3$. Diese Unendlichkeitsbedingung ersetzt III. überall, wo S sich ins Unendliche erstreckt.

Dieser Beweis kann und soll nur für nicht-ferromagnetische Materialien geführt werden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf isotrope Körper, in denen

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} \tag{13}$$

ist. Übrigens sind die ferromagnetischen Materialien auch als nicht-ferromagnetisch aufzufassen, wenn die Feldstärken $\mathfrak{H}$ in denselben durchweg sehr klein sind, da dann die Permeabilität nahezu konstant ist.[1])

Beweis: Angenommen, es gäbe zwei Magnetfelder $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$, welche beide den Bedingungen I bis III genügen, so bilde man das Differenzenfeld

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}_2;$$

darunter ist der Vektor verstanden, welcher durch vektorielle Subtraktion des Vektors $\mathfrak{H}_2$ vom Vektor $\mathfrak{H}_1$ entsteht.

$\mathfrak{H}'$ genügt dann den Bedingungen

$$\text{I}'. \qquad \int \mathfrak{H}_s' ds = 0$$

für jede Kurve s innerhalb S;

$$\text{II}'. \qquad \int \mu \mathfrak{H}_n' d\sigma = 0$$

für jede geschlossene Fläche σ innerhalb S;

$$\text{III}'. \qquad \mu \mathfrak{H}_n' = 0$$

auf der Oberfläche des Raumes.

II′ sagt aus, daß die Vektorlinien $\mu\mathfrak{H}'$ nirgends entspringen und nirgends münden (vgl. die Bemerkung zu Gl. (19)), III′ zeigt, daß auch durch die Oberfläche keine $\mu\mathfrak{H}'$-Linien in den Raum eindringen, es könnte also höchstens geschlossene $\mu\mathfrak{H}'$-Linien in S geben. Existierte eine solche, so könnte man sie zur Kurve s in

1) Daß die Permeabilität bei Eisen und Stahl für sehr kleine Feldstärken konstant ist, folgt aus den Messungen von C. Baur, Ann. Phys. Chem. **11**, 394, 1880; Lord Rayleigh, Phil. Mag. **23**, 225, 1887; G. Rößler, Elektrotechn. Ztschr. 1893, S. 134; P. Culmann, Elektrotechn. Zeitschr. 1893, S. 345; W. Schmidt, Ann. Phys. Chem. **54**, 655, 1895; L. Holborn, Ann. Phys. Chem. **61**, 281, 1897; E. Gumlich, Tabellen von Landolt-Börnstein, Berlin 1905; H. E. J. G. Dubois, ibid.

I′ wählen, dann müßte das Linienintegral positiv sein, da $\mathfrak{H}'$ längs der ganzen Kurve die Richtung von s hat (weil μ eine positive Konstante ist). Geschlossene $\mu\mathfrak{H}'$-Linien widersprechen also I′, d. h. $\mathfrak{H}'$ ist durchweg Null oder

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2,$$

die angenommene Verschiedenheit zwischen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ ist unmöglich.

Der Beweis wäre noch ebenso zu führen gewesen, wenn anstatt (13)

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M}_\omega \tag{13′}$$

wäre, wo $\mathfrak{M}_\omega$ einen überall in S dauernd gegebenen Vektor bedeutet; denn für das Differenzenfeld $\mathfrak{H}'$ würde II′ noch immer gelten. Diese Bemerkung ist für das Spätere von Interesse; in Rücksicht darauf ist auch die Bezeichnung des dauernd konstanten Vektors gewählt, die hier vielleicht auffallend erscheinen könnte.

Der Eindeutigkeitsbeweis setzt uns in den Stand, von einem irgendwie gefundenen Felde nachzuweisen, daß es das gesuchte ist, indem wir zeigen, daß es allen Bedingungen genügt. Darin liegt die Bedeutung des Beweises.

9. Das magnetische Potential. Außerhalb der Raumteile, durch welche elektrische Ströme fließen, läßt sich immer eine Funktion U von x, y, z finden, so daß

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{H}_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ \mathfrak{H}_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ \mathfrak{H}_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}\right. \tag{22}$$

ist. U heißt das magnetische Potential. Die Einführung desselben hat den Vorteil, daß man es nur mit einer Funktion U zu tun hat, anstatt mit drei Funktionen $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$.

Beweis: Für jede beliebige geschlossene Kurve ist

$$\int \mathfrak{H}_s\, ds = \sum 4\pi i,$$

das Linienintegral ist also vom Wege abhängig, da die Summierung sich auf alle Strombahnen erstreckt, welche die Kurve s umzingelt.

Legen wir aber Sperrflächen σ, welche die Strombahnen zu Randkurven haben und bestimmen, daß die Kurve s keine Sperrfläche durchsetzen darf, so wird für jede noch mögliche geschlossene Kurve

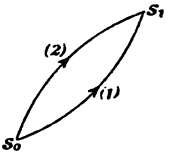

Fig. 11.

$$\int \mathfrak{H}_s ds = 0;$$

es muß also $\int_{s_0}^{s_1} \mathfrak{H}_s ds$ längs einer Kurve, welche s_0 mit s_1 verbindet, von der Wahl dieser Kurve unabhängig sein, d. h. auf dem Wege (1) denselben Wert haben wie auf dem Wege (2) (Fig. 11), also

$$(23) \qquad {}^{(1)}\int_{s_0}^{s_1} \mathfrak{H}_s ds = {}^{(2)}\int_{s_0}^{s_1} \mathfrak{H}_s ds,$$

denn beim Durchlaufen der geschlossenen Kurve, die sich aus den Wegen (1) und (2) zusammensetzt, muß sein

$$(24) \qquad {}^{(1)}\int_{s_0}^{s_1} \mathfrak{H}_s ds + {}^{(2)}\int_{s_1}^{s_0} \mathfrak{H}_s ds = 0.$$

Diese Gleichung ist aber identisch mit (23), wenn man im zweiten Integral die Integrationsfolge umkehrt.

Wir gehen von einem konstanten Punkte s_0 aus und bilden das Integral $\int_{s_0}^{s_1} \mathfrak{H}_s ds$; dieses hängt bei konstant gedachtem s_0 nach (23) nur vom Punkte s_1 ab, wir können also setzen

$$(25) \qquad \int_{s_0}^{s_1} \mathfrak{H}_s ds = - U(s_1).$$

Wir wählen einen s_1 unendlich benachbarten Punkt s_1', und es sei

$$(26) \qquad \int_{s_0}^{s_1'} \mathfrak{H}_s ds = - U(s_1').$$

Da wir den Integrationsweg, wie wir sahen, beliebig wählen dürfen, so wählen wir ihn in (26) über s_1, dann gibt die Differenz

von (26) und (25)

$$\int_{s_1}^{s_1'} \mathfrak{H}_s\, ds = -\,(U(s_1') - U(s_1)). \tag{27}$$

Da s_1 und s_1' einander unendlich benachbart sind, können wir links das Integralzeichen fortlassen. Rechts ist der Zuwachs auch unendlich klein, gleich $-dU$, und wenn wir U als Funktion von s auffassen, gleich $-\frac{\partial U}{\partial s}\,ds$, also folgt aus (27)

$$\mathfrak{H}_s = -\frac{\partial U}{\partial s}. \tag{28}$$

Da ds nun jeden Ort und jede Richtung haben kann, so folgen speziell die Gleichungen (22).

Setzt man (22) in (4) ein, so sieht man, daß diese Gleichungen überall da befriedigt sind, wo keine elektrischen Strömungen existieren.

Das magnetische Potential ist nur bis auf eine willkürliche Konstante definiert, denn nur die Differentialquotienten nach den Koordinaten haben wegen (22) physikalische Bedeutung. Gewöhnlich gibt man der Größe U in unendlicher Entfernung von allen Strömen den Wert Null.

Läßt man die Sperrflächen wieder fort, so ist U keine eindeutige Funktion des Ortes mehr, die rechte Seite in (25) hängt vom Integrationswege s ab, denn beim einmaligen Umzingeln des Stromes i kommt wegen (3′) links die additive Konstante $+\,4\pi i$ hinzu.

10. Das magnetische Potential eines geradlinigen Stromes i. Führen wir Zylinderkoordinaten r, φ, z um die Achse O eines geradlinigen Stromes, der in der Richtung der z-Achse fließt, ein und bestimmen die Komponenten von $\mathfrak{H}$ nach diesen Koordinaten, so folgt aus den Angaben in Nr. 3 oder auch aus Gleichung (3′) unter Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse

$$\begin{cases} \mathfrak{H}_r = 0 \\ \mathfrak{H}_\varphi = \dfrac{2i}{r} \\ \mathfrak{H}_z = 0 \end{cases} \tag{29}$$

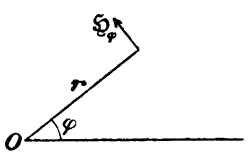

Fig. 12.

oder wegen (28), da die Komponenten des Linienelements ds nach diesen Richtungen die Werte $dr, r\,d\varphi, dz$ haben,

$$(30)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial U}{\partial r} = 0 \\ -\dfrac{\partial U}{r\partial \varphi} = \dfrac{2i}{r} \\ -\dfrac{\partial U}{\partial z} = 0\,. \end{cases}$$

Durch Integration von (30) ergibt sich

$$(31)\qquad U = -2i\varphi + \text{const.}$$

In der Tat zeigt sich, da φ bei einmaligem Umlaufen der z-Achse um 2π wächst, daß U hierbei um $-4\pi i$ zunimmt.

Da $\operatorname{tg}\varphi = y/x$ ist, so lautet (31) in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten

$$(31')\qquad U = -2i \operatorname{arctg} y/x + \text{const.}$$

11. Das magnetische Potential linearer Ströme in Luft. Nach (22) in Nr. 9 leitet sich $\mathfrak{H}$ aus einem Potential U ab.

Setzt man die Werte aus (22) in die Gleichung (20) ein, in der $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ ist, wenn der ganze Raum von unpolarisierbaren Materialien erfüllt ist, d. h. von solchen mit der Permeabilität $\mu = 1$, wie das z. B. praktisch für Luft und Kupfer erfüllt ist, so bekommt man für U die Laplacesche Differentialgleichung

$$(32)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

oder in anderer Bezeichnungsweise

$$(32')\qquad \Delta U = 0\,.$$

U ist ferner nicht eindeutig, sondern erleidet an einer beliebigen Fläche σ, welche durch die Stromkurve s gelegt ist, in der der Strom i fließt, den Sprung $-4\pi i$, wenn man von der positiven zur negativen Seite dieser sogenannten Sperrfläche geht, und zwar ist als positive Seite der Sperrfläche die Seite der positiven Normalen verstanden, die, wie üblich, zur Stromrichtung in der Beziehung der Rechtsschraubung steht; in Formel: $U_- = U_+ - 4\pi i$.

Da $\mathfrak{H}$ im Unendlichen wie $1/R^3$ verschwindet (vgl. Nr. 8), so muß wegen (22) U wie $1/R^2$ verschwinden, da $\mathfrak{H}$ aus U durch Differentiation nach den Koordinaten entsteht.

Hierdurch ist U nach Nr. 8 eindeutig bestimmt, denn (32) ist in dem speziellen Falle $\mu = 1$ ein anderer Ausdruck für (19) resp. (20), der Sprung $-4\pi i$ ist äquivalent der Bedingung (3'), und die Unendlichkeitsbedingung gibt $\mathfrak{H}_n$ auf der Oberfläche des unendlichen Raumes als Null.

Eine Funktion, welche diesen Bedingungen genügt, ist das gesuchte U.

Zunächst ist es klar, daß das Potential mehrerer linearer Ströme sich additiv aus dem Potential der einzelnen Ströme zusammensetzt, denn wenn $U_1, U_2, \ldots$ der Gleichung (32) und der Unendlichkeitsbedingung einzeln genügen, so tut $U = U_1 + U_2 + \cdots$ das auch. Ist ferner U_1 durchweg stetig und macht nur an der Fläche σ_1 den Sprung $-4\pi i_1$, und ist U_2 überall bis auf die Fläche σ_2 stetig, wo es den Sprung $-4\pi i_2$ macht, so hat U gerade die vorgeschriebenen Unstetigkeiten.

Wir können uns also auf die Bestimmung von U_1 beschränken.

Zunächst zeigen wir, daß, wenn r die Entfernung zweier Punkte $p(xyz)$ und $p'(x'y'z')$ ist, $1/r$ der Gleichung (32) genügt.

Es ist nämlich

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

also

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{x-x'}{r};$$

ebenso ist

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = -\frac{y-y'}{r^3}, \qquad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = -\frac{z-z'}{r^3};$$

ferner ist

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-x')^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-y')^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-z')^2}{r^5},$$

also, wenn man diese drei Gleichungen addiert,

$$\Delta \frac{1}{r} = 0. \tag{33}$$

Nun sei $p'(x'y'z')$ ein Punkt der Sperrfläche σ, welche die Strombahn i_1 zur Randkurve hat; die positive Flächennormale sei n. Dann ist auch $\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma$ eine Lösung der Gleichung (32), denn es ist $\Delta \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = \int \frac{\partial}{\partial n} \Delta \frac{1}{r} d\sigma = 0$ wegen (33), da die Reihenfolge der Differentiationen und Integrationen beliebig ist (Δ bedeutet ja nur Differentiationen nach den Parametern xyz in r, während die Integration und die Differentiation nach n bezüglich der Variablen x', y', z' zu erfolgen hat).

Nun ist

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} = +\frac{1}{r^2}\cos(n,r),$$

wenn die positive Richtung von r die Richtung von p' nach p ist; also ist

$$\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = \int \frac{1}{r^2}\cos(n,r)\, d\sigma.$$

Führen wir den körperlichen Winkel $d\omega$ ein, unter dem $d\sigma$ von p aus erscheint, so ist $d\Sigma = r^2 d\omega$ das Flächenelement, welches der körperliche Winkel $d\omega$ aus einer Kugel vom Radius r mit dem Zentrum p herausschneidet. Aus der Fig. 13 folgt

$$d\Sigma = d\sigma \cos(n,r),$$

also ist

$$d\omega = \frac{d\sigma \cos(n,r)}{r^2},$$

d. h.

$$\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = \int \frac{\cos(n,r)}{r^2} d\sigma = \int d\omega.$$

Das Integral ist also der körperliche Winkel, unter dem die Fläche σ von p aus erscheint. Dabei sind die Winkelelemente $d\omega$ als negativ in Rechnung zu ziehen, für die $\sphericalangle(n,r)$ stumpf ist, d. h. deren zugehörige Flächenelemente $d\sigma$ von der negativen Seite von p aus gesehen werden.

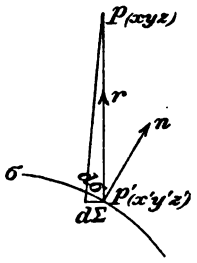

Fig. 13.

Rückt p dem Element $d\sigma$ unendlich nahe auf der Seite der positiven Normalen, so wird der körperliche Winkel, unter dem $d\sigma$ erscheint, gleich 2π. Tritt p durch die Oberfläche σ bei $d\sigma$ hindurch, so wird der körperliche Winkel, unter dem $d\sigma$ von p aus erscheint, plötzlich -2π, während die Winkel, unter denen die anderen Elemente erscheinen, sich stetig ändern; d. h. $\int d\omega$ erleidet einen Sprung -4π beim Hindurchgehen von p durch die Fläche σ von der Seite der positiven zur Seite der negativen Normalen.

Bezeichnet man den körperlichen Winkel, unter dem σ von p aus erscheint, mit ω, so ist

$$U_1 = i_1 \omega = i_1 \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma$$

eine Funktion, die allen an U_1 zu stellenden Bedingungen genügt, also das magnetische Potential des Stroms i_1, denn es erfüllt (32), macht an σ den Sprung $-4\pi i_1$ und verschwindet im Unendlichen wie $\frac{1}{R^2}$, da dies der körperliche Winkel tut.

12. Die Tangentenbussole. Bei elektromagnetischen Messungen spielt das Feld auf der Achse eines Kreisstroms eine wichtige Rolle. Auf Grund der vorigen Ausführungen läßt sich dasselbe leicht berechnen. Die Fläche der Kugelkalotte, welche durch die Ebene des Kreisstroms von der Kugel abgeschnitten wird, deren Zentrum in p liegt, und deren Radius $\sqrt{x^2+R^2}$ die Verbindungslinie des Punktes p mit einem Punkte der Kreisperipherie ist (Fig. 14), hat die Größe $2\pi(\sqrt{x^2+R^2}-x)\sqrt{x^2+R^2}$, also erhält man den körperlichen Winkel, unter dem sie erscheint, indem man

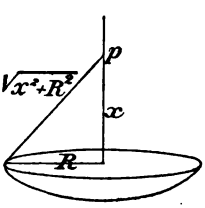

Fig. 14.

durch das Quadrat des Radius $\sqrt{x^2+R^2}$ dividiert, als

$$2\pi\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right).$$

Folglich ist

$$U=2\pi i\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right) \tag{34}$$

und das Feld

$$\mathfrak{H}_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{2\pi i R^2}{\sqrt{x^2+R^2}^3}.$$

Aus Symmetriegründen sind auf der Achse der Kreisebene $\mathfrak{H}_y$ und $\mathfrak{H}_z$ Null.

Im Zentrum des Kreises, also für $x=0$, ist

$$\mathfrak{H}_x=\frac{2\pi i}{R}.$$

Steht die Ebene des Kreises parallel der Richtung eines gleichförmigen Feldes H, so setzen sich die beiden Felder $\mathfrak{H}_x$ und H zu einem resultierenden Felde zusammen, dessen Neigung gegen H nach Fig. 15 gegeben ist durch

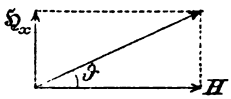

Fig. 15.

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{\mathfrak{H}_x}{H}=\frac{2\pi i}{RH}. \tag{34'}$$

Kennt man H, so kann man i durch (34') bestimmen und umgekehrt, indem man den Winkel ϑ mißt, um den die Richtung des resultierenden Feldes von der des Feldes H abweicht (siehe unten); das ist der Zweck der Tangentenbussole.

13. Das geradlinige Solenoid. Auf einen Zylinder von der Länge l und dem Querschnitt σ, dessen Querdimensionen unendlich klein gegen l sind, sei eine eng gewundene Spirale von N Windungen gewickelt. Es soll das Magnetfeld eines in der Spirale fließenden Stromes i berechnet werden.

Im Innern der Spirale, bis nahe an die Enden, ist das Feld $\mathfrak{H}$ parallel der Zylinderachse, es habe hier den Wert A. Um einen Punkt jeder Endfläche σ denken wir uns Kugeln von einem Radius a gelegt, der unendlich groß gegen die Querdimensionen des Zylinders, unendlich klein gegen l ist (vgl. Fig. 16). Dann treten durch das Innere des Zylinders $A\sigma$ $\mathfrak{H}$-Linien in die eine Kugel hinein. Also müssen wegen (19) ebensoviele aus derselben in den umgebenden Raum austreten. Da der Zylinder unendlich dünn gegen den Kugelradius ist, und da die beiden Kugeln unendlich weit voneinander

entfernt sind, werden die $\mathfrak{H}$-Linien im Innern der Kugeln gleichmäßig nach allen Seiten, also radial verlaufen. Nennen wir den Abstand von einem Punkte der einen Endfläche des Solenoids r_1, den von einem Punkte der anderen Endfläche r_2, so ist im Innern der einen Kugel

$$\mathfrak{H}_r \cdot 4r_1^2\pi = A\sigma,$$

also

$$-\frac{\partial U}{\partial r_1} = \frac{A\sigma}{4\pi r_1^2},$$

d. h.

$$U = \frac{A\sigma}{4\pi r_1}.$$

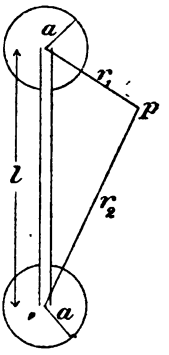

Fig. 16.

Im Innern der anderen Kugel wird

$$U = -\frac{A\sigma}{4\pi r_2}$$

sein, da in diese $-A\sigma$ $\mathfrak{H}$-Linien durch den Zylinder eintreten. Selbstverständlich gelten diese Werte nicht mehr in unmittelbarer Nähe der Endflächen des Solenoids, wo sie unendlich groß würden, während $\mathfrak{H}$ in Wirklichkeit überall endlich bleibt.

Im Außenraum ergibt sich

$$U = \frac{A\sigma}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{35}$$

Diese Funktion genügt allen an sie zu stellenden Bedingungen, insbesondere wegen (33) der Gleichung (32) und geht stetig in die Werte über, die im Innern der Kugeln gelten, da im Innern der ersten Kugel r_1 klein gegen r_2, also genähert $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$ gleich $\frac{1}{r_1}$ ist.

Um A zu bestimmen, benutzen wir (3′). Es ist $\int \mathfrak{H}_s\, ds$ im Innern des Zylinders und außerhalb desselben zu bilden.

Im Innern ist das Linienintegral bis zum Eintritt in die Kugeln $A(l - 2a)$. Von der Oberfläche der einen bis zur Oberfläche der anderen Kugel ist es nach (27) durch die Differenz der U-Werte gegeben. Wählen wir die Punkte der Kugeln, die einander am nächsten liegen, für die also $r_1 = a$, $r_2 = l - a$ resp. $r_1 = l - a$, $r_2 = a$ ist, so erhalten wir nach (35)

$$U_1 = \frac{A\sigma}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l-a}\right)$$

$$U_2 = \frac{A\sigma}{4\pi}\left(\frac{1}{l-a} - \frac{1}{a}\right).$$

Das Linienintegral wird also

$$U_1 - U_2 = \frac{A\sigma}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l-a}\right).$$

Dann fehlt nur noch das Integral längs der Kurvenstücke innerhalb der Kugeln; das können wir aber vernachlässigen, wenn wir l groß genug wählen, da der Beitrag, den diese Raumteile zum Integral liefern, von l innerhalb der erstrebten Genauigkeit unabhängig ist, während der Beitrag, den das Innere des Solenoids liefert, mit l proportional ist.

Es ist also bis auf unendlich kleine Größen

$$\int \mathfrak{H}_s\, ds = 4\pi i N = A(l - 2a) + \frac{A\sigma}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l-a}\right).$$

Anstatt $l - 2a$ dürfen wir l schreiben; ferner ist der letzte Term der rechten Seite gegen den ersten zu vernachlässigen wegen der Voraussetzungen über die Größenordnungen von a, l und den Querdimensionen von σ, also ist

$$A = 4\pi i \frac{N}{l} = 4\pi i n \tag{36}$$

das Magnetfeld im Innern des Solenoids, wenn $n = \frac{N}{l}$ die Zahl der Windungen pro Längeneinheit bedeutet.

Die Ableitung der Formel (36) gestaltete sich so umständlich, weil bewiesen werden mußte, daß die außerhalb der Spule liegenden Linienelemente nichts Merkliches zum Linienintegral in (3′) beitragen. Der Grund ist der, daß die $\mathfrak{H}$-Linien, welche sämtlich durch den kleinen Querschnitt der Spule müssen, im umgebenden Raume sich weit ausbreiten, so daß die Dichte derselben und damit die Feldstärke unendlich klein wird.

Formel (36) gilt unabhängig von der Form des Querschnittes, den das Solenoid besitzt. Ist der Querschnitt kreisförmig, so läßt sich auf Grund von (34) eine genauere Formel für das Feld auf der Achse des Solenoids berechnen.

Hat der Punkt, für den das Feld berechnet werden soll, die Koordinate z auf der Achse, während die Endflächen des Solenoids die Koordinaten 0 und l haben, so ist nach (34) das Potential einer Kreiswindung, deren Mittelpunkt die Koordinate ζ hat, im Punkte z

$$U = 2\pi i \left(1 - \frac{z-\zeta}{\sqrt{R^2+(z-\zeta)^2}}\right).$$

Das Potential aller Windungen wird demnach

$$U = 2\pi i \int_{\zeta=0}^{\zeta=l} \left(1 - \frac{z-\zeta}{\sqrt{R^2+(z-\zeta)^2}}\right) n\,d\zeta,$$

da auf der Strecke $d\zeta$ sich $n\,d\zeta$ Windungen befinden sollen.

Führen wir die neue Variable

$$u = z - \zeta$$

ein, so wird

$$d\zeta = -\,du$$

und

$$U = -\,2\pi n i \int_{z}^{z-l} \left(1 - \frac{u}{\sqrt{R^2+u^2}}\right) du.$$

Nun ist $\mathfrak{H}_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$; diese Größe ist aber leicht zu bilden, da z nur in den Grenzen des Integrals vorkommt. Wir erhalten

$$(36') \qquad \mathfrak{H}_z = 2\pi n i \left\{\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{z-l}{\sqrt{R^2+(z-l)^2}}\right\}.$$

In diesem Ausdruck sind die Wurzeln stets mit dem positiven Zeichen zu nehmen, da sie, wie man aus der Ableitung von (34) ersieht, bestimmte Entfernungen bedeuten.

z ist also der Abstand des fraglichen Punktes von einer Endfläche; für die Punkte im Innern des Solenoids ist $0 < z < l$. So ist z. B. in der Mitte, d. h. für $z = \frac{l}{2}$

$$\mathfrak{H}_z = 4\pi n i \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}}.$$

Ist R klein gegen l, so wird

$$\mathfrak{H}_s = 4\pi n i \left(1 - \frac{2R^2}{l^2}\right).$$

(36′) gibt uns Aufklärung darüber, in wie weit Formel (36) in den einzelnen Achsenpunkten im Innern des Solenoids eine Annäherung ist.

14. Körper von konstanter Permeabilität im magnetischen Felde. Bringt man einen Körper von konstanter Permeabilität μ, in welchem nach (13)

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$$

ist, in ein magnetisches Feld, so wird die Feldstärke an jeder Stelle des Raumes geändert. Wir wollen die allgemeinen Bedingungen aufstellen, denen $\mathfrak{H}$ zu genügen hat.

Diese sind durch (3′) S. 6 resp. (4′) S. 8 und (19) resp. (20) S. 15 gegeben.

Das Feld, welches existierte, bevor der polarisierbare Körper ins Feld gebracht wurde, wollen wir $\mathfrak{H}_0$ nennen. Dieses genügt nach (4′) der Gleichung

$$\text{rot}\,\mathfrak{H}_0 = 4\pi\mathfrak{J} \tag{37}$$

und nach (20) der Gleichung

$$\text{div}\,\mathfrak{H}_0 = 0. \tag{38}$$

Nachdem der Körper ins Feld gebracht ist, gelten die Gleichungen

$$\text{rot}\,\mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{J} \tag{39}$$

$$\text{div}\,\mu\mathfrak{H} = 0, \tag{40}$$

oder, da μ räumlich konstant sein soll,

$$\text{div}\,\mathfrak{H} = 0. \tag{40′}$$

Setzen wir

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{K}, \tag{41}$$

und nennen wir $\mathfrak{K}$ das Zusatzfeld, so folgt durch Subtraktion der Gleichung (37) von (39) resp. (38) von (40′)

$$\text{rot}\,\mathfrak{K} = 0 \tag{42}$$

$$\text{div}\,\mathfrak{K} = 0. \tag{43}$$

Im Unendlichen ist die Veränderung des Feldes durch den Körper nicht mehr merklich, dort muß also $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0$ sein oder

$$\mathfrak{K} = 0 \quad \text{wie} \quad \frac{1}{R^3}, \tag{44}$$

da $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_0$ wie $\frac{1}{R^3}$ verschwinden.

15. Die Grenzbedingungen. Da $\mathfrak{B}$ ein solenoidaler Vektor ist, so darf es keine Fläche σ mit der Normalen n geben, an der $\mathfrak{B}_n$ unstetig ist, denn sonst wären an diesen Stellen Anfangs- oder Endpunkte von $\mathfrak{B}$ vorhanden. Das bedeutet aber für die Grenze des Körpers gegen Luft, in welcher $\mu = 1$ ist,

$$\mu \mathfrak{H}_{in} = \mathfrak{H}_{an}, \tag{45}$$

wenn der Index i für das Innere des Körpers, der Index a für das Äußere, also die Luft gilt.

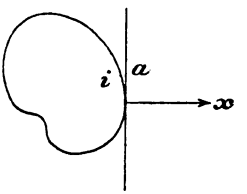

Fig. 17.

Gleichung (4′) können wir in rechtwinkligen Koordinaten (vgl. (4)) schreiben und die yz-Ebene für den Augenblick als Tangentialebene an einem bestimmten Punkte des Körpers ansehen (Fig. 17). Damit die Gleichungen (4) dann Beziehungen zwischen endlichen Größen sind, dürfen die Differentialquotienten nach x an der Grenze nicht unendlich groß werden (die Differentialquotienten nach y und z bleiben selbstverständlich endlich, da man bei der Bildung derselben nur die $\mathfrak{H}$-Werte auf der einen Seite der Grenzfläche braucht), d. h. es müssen $\mathfrak{H}_y$ und $\mathfrak{H}_z$ an der Grenzfläche stetig sein.

Ohne Spezialisierung des Koordinatensystems lautet diese Bedingung: Die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{H}$ müssen stetig sein.

Da $\mathfrak{H}_0$ überall stetig ist, so müssen auch die Tangentialkomponenten von $\mathfrak{K}$ stetig sein, während für die Normalkomponente gilt

$$\mathfrak{H}_{i0n} = \mathfrak{H}_{a0n}. \tag{46}$$

Subtrahieren wir (46) von (45), so folgt

$$\mu \mathfrak{K}_{in} - \mathfrak{K}_{an} = -(\mu - 1)\mathfrak{H}_{0n} \tag{47}$$

oder

$$\mathfrak{K}_{in} - \mathfrak{K}_{an} = -(\mu - 1)\mathfrak{H}_{in}. \tag{47′}$$

In (47) haben wir den Index i oder a an $\mathfrak{H}_{0n}$ fortgelassen, da $\mathfrak{H}_0$ an σ stetig ist, diese Unterscheidung also überflüssig erscheint.

Man bezeichnet gewöhnlich

$$(48) \qquad (\mu - 1)\mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{M}$$

und nennt $\mathfrak{M}$ die Magnetisierung, es ist also wegen (13) S. 18

$$(49) \qquad \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M},$$

d. h. man führt die Bezeichnung ein:

$$(50) \qquad \mathfrak{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi}\mathfrak{H} = \varkappa\mathfrak{H},$$

wenn $\varkappa$ die Suszeptibilität bedeutet. (47′) sagt aus, daß die Normalkomponente von $\mathfrak{R}$ an der Grenze des Körpers gegen Luft einen Sprung erleidet, der gleich dem 4π-fachen der Normalkomponente der Magnetisierung an der fraglichen Stelle ist.

16. Die Brechung der Induktionslinien. Zerlegen wir den Vektor $\mathfrak{H}$ an der Grenze eines Körpers gegen Luft in die Tangentialkomponente $\mathfrak{H}_t$ und die Normalkomponente $\mathfrak{H}_n$ zu beiden Seiten der Oberfläche, so ist nach obigen Bedingungen

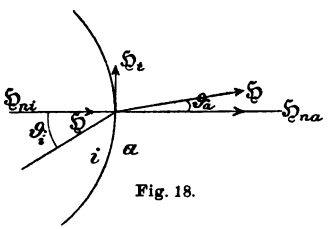

Fig. 18.

$$(51) \qquad \mu\mathfrak{H}_{ni} = \mathfrak{H}_{na}$$

$$(52) \qquad \mathfrak{H}_{ti} = \mathfrak{H}_{ta}.$$

Daraus folgt 1., daß der Vektor $\mathfrak{H}_t$, der Vektor $\mathfrak{H}_a$ und die Normale n in einer Ebene liegen.

2. Dividiert man (52) durch (51) und nennt den Winkel zwischen $\mathfrak{H}$ und der Normalen ϑ (vgl. Fig. 18), so folgt

$$(53) \qquad \frac{\operatorname{tg}\vartheta_i}{\operatorname{tg}\vartheta_a} = \mu.$$

1. und 2. bilden das Brechungsgesetz der $\mathfrak{H}$-Linien, oder da $\mathfrak{B}$ parallel $\mathfrak{H}$ ist, das Brechungsgesetz der Induktionslinien.

17. Der vollkommene magnetische Kreis. In Nr. 5 hatten wir gesehen, daß im Innern eines geschlossenen Solenoids ein Feld existiert, welches sich nach (8) berechnen läßt

$$\mathfrak{H} = \frac{2Ni}{r} = \frac{4\pi Ni}{2r\pi}.$$

Außerhalb des Ringes ist das Feld Null.

Sind die Dimensionen der erzeugenden Fläche des Ringes klein gegen den Abstand ihrer Punkte von der Rotationsachse, so ist r für alle Punkte im Innern des Ringes merklich konstant. Nennen wir die Länge eines solchen Ringes $2r\pi = l$, so können wir auch schreiben

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi i N}{l} = 4\pi n i .$$

Bringt man einen koaxialen Ring aus irgendeinem Material von der Permeabilität μ, ein sogenanntes Toroid, in das Solenoid, so ändert sich das Feld nicht, da noch immer sämtlichen Bedingungen genügt wird. (Das liegt daran, daß keine $\mathfrak{H}$-Linien senkrecht zur Oberfläche des Ringes verlaufen.) Im Innern dieses Ringes ist also

$$\mathfrak{B} = \mu \frac{4\pi N i}{l} . \tag{54}$$

Irgendwelche Körper im Außenraum ändern das Feld in der Spule nicht, da im Außenraum vorher wie nachher das Feld Null bleibt.

Hat der Ring den Querschnitt σ, so ist der gesamte Induktionsfluß durch denselben

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{B}\sigma = \mu\sigma \frac{4\pi N i}{l} = \frac{4\pi N i}{\frac{l}{\mu\sigma}} . \tag{55}$$

$w = \frac{l}{\mu\sigma}$ nennt man den magnetischen Widerstand, μ auch die magnetische Leitfähigkeit, $4\pi N i$ die magnetomotorische Kraft $M \cdot M \cdot K$. Dann ist

$$\mathfrak{Z} = \frac{M \cdot M \cdot K}{w} \tag{55'}$$

in der Form dem Ohmschen Gesetz genau analog.

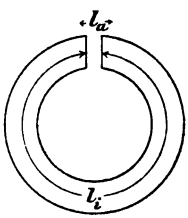

Fig. 19.

18. Der unvollkommene magnetische Kreis. Ist der Ring mit einem schmalen Schlitz von der Breite l_a versehen (vgl. Fig. 19), und ist die Länge des geschlitzten Ringkörpers l_i, so daß $l = l_i + l_a$ die ganze Peripherie des Kreises ist, so verlaufen die $\mathfrak{H}$-Linien noch immer peripherisch, wenn man von dem komplizierteren Verhalten in der Nähe der Schlitzränder absieht, wo eine Ausbauchung der $\mathfrak{H}$-Linien und ein Austreten in

den umgebenden Luftraum stattfindet, was man als Streuung bezeichnet.

Genähert ist also nach (3′)

$$\mathfrak{H}_i l_i + \mathfrak{H}_a l_a = 4\pi N i. \tag{56}$$

An der Stirnfläche des Schlitzes folgt aus (45)

$$\mu \mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_a. \tag{57}$$

Eliminiert man $\mathfrak{H}_a$ mit Hilfe von (57) aus (56), so ergibt sich

$$\mathfrak{H}_i (l_i + \mu l_a) = 4\pi N i \tag{58}$$

oder der Induktionsfluß durch den ganzen Querschnitt

$$\mathfrak{Z} = \mu \mathfrak{H}_i \sigma = \mathfrak{H}_a \sigma = \frac{4\pi N i}{\frac{l_i}{\mu\sigma} + \frac{l_a}{\sigma}} \tag{59}$$

oder

$$\mathfrak{Z} = \frac{M \cdot M \cdot K}{w_i + w_a}. \tag{59′}$$

w_i heißt der innere, w_a der äußere magnetische Widerstand des „magnetischen Kreises".

Eine analoge Formel stellt genähert die Verhältnisse in einem geschlitzten magnetischen Kreise dar, selbst wenn die Querschnitte und Permeabilitäten der einzelnen Teile des Kreises nicht einander gleich sind, wie z. B. bei dem Elektromagneten Fig. 20, wo eine mittlere Länge und ein mittlerer Querschnitt der einzelnen Teile einzuführen ist.

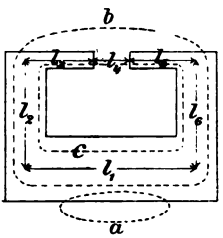

Fig. 20.

Man zerlege den magnetischen Kreis in n Teile mit den Längen $l_1, l_2, \ldots, l_n$, den Querschnitten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, den Permeabilitäten $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, dann ist

$$\mathfrak{H}_1 l_1 + \mathfrak{H}_2 l_2 + \cdots + \mathfrak{H}_n l_n = 4\pi N i, \tag{60}$$

$$\mu_1 \mathfrak{H}_1 \sigma_1 = \mu_2 \mathfrak{H}_2 \sigma_2 = \cdots = \mu_n \mathfrak{H}_n \sigma_n = \mathfrak{Z}. \tag{61}$$

(61) ist die Solenoidalitätsbedingung des Vektors $\mathfrak{B}$, falls keine Streuung stattfindet. Eliminiert man $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$ durch (61)

aus (60), so ergibt sich

$$(62)\qquad \mathfrak{Z} = \frac{4\pi Ni}{\frac{l_1}{\mu_1\sigma_1} + \frac{l_2}{\mu_2\sigma_2} + \cdots + \frac{l_n}{\mu_n\sigma_n}} = \frac{M \cdot M \cdot K}{w_1 + w_2 + \cdots w_n}.$$

(62) bildet die Grundlage der Berechnung von Elektromagneten, Dynamomaschinen und Motoren; bei der genauen Berechnung wird aber die Streuung mit berücksichtigt.

Vernachlässigt man die Streuung, d. h. nimmt man an, daß sämtliche Induktionslinien den ganzen magnetischen Kreis durchlaufen wie die Induktionslinien vom Typus *c* in Fig. 20, so gilt (61), d. h. es ist

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2 = \cdots = \mathfrak{Z}_n.$$

In Wirklichkeit aber werden die Induktionslinien zum Teil seitlich aus dem Kreise herausgedrängt und kehren auf kürzerem Wege, als dem ganzen Kreise entsprechen würde, in den Kreis zurück, wie die Induktionslinien vom Typus *a* in Fig. 20, zum Teil (besonders in der Nähe der Luftschlitze, des sogenannten Interferrikums) überspringen sie Teile des Kreises und verlaufen eine Strecke lang durch die Luft neben dem Kreise, bis sie wieder in den Kreis eintreten, wie die Induktionslinien vom Typus *b* in Fig. 20.

In diesem Falle gilt die Beziehung (61) nicht mehr. Zerlegt man auch hier den Kreis in *n* Teile, so daß in jedem $\mathfrak{Z}$ annähernd konstant ist, so folgt aus (60), wenn man entsprechend (61)

$$(61')\qquad \mathfrak{H}_1 = \frac{\mathfrak{Z}_1}{\sigma_1\mu_1} \quad \text{usw.}$$

setzt:

$$(62')\qquad \sum_{x=1}^{n} \frac{\mathfrak{Z}_x l_x}{\sigma_x \mu_x} = 4\pi Ni.$$

Gewöhnlich existiert eine Zone im magnetischen Kreise, und zwar gerade die nutzbare, von der man von vornherein weiß, daß in ihr die wenigsten Induktionslinien verlaufen. Das ist der Schlitz im Elektromagneten Fig. 20, d. h. das Gebiet 4 oder der Anker eines Motors resp. einer Dynamomaschine.

Setzt man

$$\frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{Z}_4} = \nu_x,$$

so heißt ν_x der Streuungskoeffizient der $x$ten Zone des Kreises[1]); die so definierten Streuungskoeffizienten sind vom Strome i nicht abhängig, wenn μ keine Funktion der Feldstärke ist, und sonst nur wenig von i abhängig. Mit Hilfe der Streuungskoeffizienten ergibt sich aus (62′)

$$\frac{4\pi Ni}{\sum_x \frac{l_x \nu_x}{\sigma_x \mu_x}} = \mathfrak{Z}_4 \tag{62″}$$

als bessere Näherung für den Induktionslinienfluß in einem elektromagnetischen Kreise.

Man bestimmt den Streuungskoeffizienten ν_x experimentell, indem man um die $x$te und um die nutzbare Zone je eine Windung legt, die man einzeln an ein ballistisches Galvanometer schalten kann. Das Verhältnis der beiden Galvanometerausschläge beim plötzlichen Einschalten des Stromes, wenn einmal die Windung der $x$ten, dann die der nutzbaren Zone am Galvanometer liegt, gibt ν_x.

Schlußjoch: Klemmt man einen zylindrischen Stab der Länge l, der Permeabilität μ und des Querschnittes σ an beiden Enden in die Klemmbacken eines Halbrings von großem Querschnitt σ' und großer Permeabilität μ', so wird der magnetische Widerstand des so entstandenen Kreises im wesentlichen nur aus dem des Stabes, aber nicht aus dem des Halbringes, des sogenannten Schlußjoches bestehen. In

$$\mathfrak{Z} = \frac{M \cdot M \cdot K}{w + w'} = \frac{4\pi Ni}{w + w'}$$

ist eben $w' = \frac{l'}{\mu' \sigma'}$ sehr klein gegen $w = \frac{l}{\mu \sigma}$. Genähert ist also

$$\mathfrak{Z} = \frac{4\pi Ni}{w} = \mu \frac{4\pi Ni\sigma}{l}.$$

Außer der Primärspule mit N Windungen ist der Stab mit einer Sekundärspule von N_2 Windungen eng umgeben. Diese ist mit einem ballistischen Galvanometer verbunden. Durch die Sekundärspule tritt also der Induktionsfluß $N_2 \mathfrak{Z}$. Ändert man plötzlich den Strom i, so daß der ursprüngliche Induktionslinienfluß $\mathfrak{Z}_1$ sich in $\mathfrak{Z}_2$ verändert, so fließt (vgl. (16) S. 14) durchs Galvanometer vom

1) Vgl. J. u. E. Hopkinson, Phil. Transactions **177**, 331, 1886, sowie J. Hopkinson, Orig. papers on dynamo machinery and allied subjects p. 87, New-York 1893.

elektrischen Widerstande W die meßbare Elektrizitätsmenge

$$e = \frac{N_2}{W}(\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2).$$

Daraus läßt sich μ bestimmen.

Eliminiert man $\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3, \ldots, \mathfrak{H}_n$ durch (61) aus (60), so erhält man

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{4\pi N i}{l_1\left(1 + \frac{w_2}{w_1} + \frac{w_3}{w_1} + \cdots + \frac{w_n}{w_1}\right)}.$$

Beim Schlußjoch ist also im Stabe genähert

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi N i}{l}.$$

Da

$$\mathfrak{Z} = \mu \mathfrak{H} \sigma = \mathfrak{B}\sigma$$

ist, so lassen sich die Werte von $\mathfrak{B}$ bestimmen, welche entstehen, wenn man ein Feld $\mathfrak{H}$ von bestimmter Größe im Stabe erzeugt.

Wenn der magnetische Widerstand μ' des Jochs noch merklich, aber klein ist, so werden

$$\mathfrak{Z} = \frac{4\pi N i}{w\left(1 + \frac{w'}{w}\right)}$$

und

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi N i}{l\left(1 + \frac{w'}{w}\right)}$$

zu klein gefunden, aber das Verhältnis $\mu\sigma = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{H}}$ ist unabhängig vom Jochwiderstand.

Die Entmagnetisierung. Bevor der geschlitzte Kreisring ins geschlossene Solenoid gebracht wurde, war das Feld

$$\mathfrak{H}_0 = \frac{4\pi N i}{l} = \frac{4\pi N i}{l_i + l_a},$$

nachher ergibt sich das Feld im Innern des Körpers aus (58). (58) können wir auch schreiben

$$\mathfrak{H}_i(l_i + l_a) + (\mu - 1)\mathfrak{H}_i l_a = 4\pi N i,$$

also ist

$$\mathfrak{H}_i = \frac{4\pi N i}{l_i + l_a} - \frac{l_a}{l_i + l_a}(\mu - 1)\mathfrak{H}_i \tag{63}$$

oder

$$\mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_o - \frac{l_a}{l_i + l_a}(\mu - 1)\mathfrak{H}_i . \tag{63'}$$

Das wirkliche Feld $\mathfrak{H}_i$ im Innern wird also infolge der „Entmagnetisierung" $\frac{l_a}{l_i + l_a}(\mu - 1)\mathfrak{H}_i$ kleiner als das ursprüngliche Feld $\mathfrak{H}_o$. Wir können (63') schreiben

$$\mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_o - P\mathfrak{M}, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{H}_i = \frac{\mathfrak{H}_o}{1 + \varkappa P}, \tag{64}$$

wenn wir

$$\frac{4\pi l_a}{l_i + l_a} = P \tag{65}$$

setzen und (48) S. 32 benutzen.

Die Entmagnetisierung hängt also von der Stärke der auftretenden Magnetisierung und diese von der Suszeptibilität des Materials ab.

P heißt Entmagnetisierungskoeffizient, er ist nur von geometrischen Größen abhängig. Die Entmagnetisierung wird um so größer, je weiter der Schlitz im Verhältnis zur Ringlänge ist, sie wird Null, d. h. das Feld wird das ursprüngliche, wenn die Schlitzweite unendlich klein wird.

Das Potential des Zusatzfeldes. Das Zusatzfeld $\mathfrak{K}$ leitet sich nach (42) S. 30 aus einem Potential V ab, d. h. es ist

$$\mathfrak{K}_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \mathfrak{K}_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \mathfrak{K}_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{66}$$

Setzt man (66) in (43) S. 30 ein, so ergibt sich, daß V der Gleichung

$$\Delta V = 0 \tag{67}$$

genügt. Im Unendlichen muß V wie $\frac{1}{R^2}$ verschwinden (vgl. (44)) Wegen (47) S. 31 macht die Normalkomponente von $\mathfrak{K}$ an der Oberfläche einen Sprung, und zwar ist

$$\mu \frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_a}{\partial n} = (\mu - 1)\mathfrak{H}_{on}. \tag{68}$$

Da $\mathfrak{K}$ überall endlich ist, muß V von der Oberfläche des Kör-

pers (wegen (66)) stetig sein, also

$$V_i = V_a. \tag{69}$$

Durch (67) bis (69) ist V eindeutig bestimmt (vgl. Nr. **8**).

19. $\Delta V = 0$ in krummlinigen Koordinaten.[1]) Es ist zweckmäßig, solche Koordinaten in die Gleichung (67) einzuführen, daß die Oberfläche des Körpers durch einen konstanten Wert *einer* Koordinate dargestellt wird.

Die Gleichung (67) ist ein anderer Ausdruck für $\operatorname{div} \mathfrak{K} = 0$, und dieses wieder ist nach (21) Nr. 7 identisch mit

$$\int \mathfrak{K}_n \, d\sigma = 0$$

für jede beliebige geschlossene Fläche σ.

Wir beschränken uns auf orthogonale Koordinaten, d. h. auf den Fall, daß die Flächen der verschiedenen Flächenscharen sich rechtwinklig schneiden.

Es sind x, y, z als Funktionen der krummlinigen Koordinaten p_1, p_2, p_3 gegeben, also

$$x = f_1(p_1 p_2 p_3), \quad y = f_2(p_1 p_2 p_3), \quad z = f_3(p_1 p_2 p_3). \tag{70}$$

Das Linienelement auf der Schnittkurve der Flächen $p_2 = \text{const}$ und $p_3 = \text{const}$, auf der also nur p_1 sich verändert, stellt sich in der Form dar

$$ds_{p_1} = e_1 \, dp_1; \tag{71}$$

ebenso ist

$$ds_{p_2} = e_2 \, dp_2,$$

$$ds_{p_3} = e_3 \, dp_3,$$

wo die e Funktionen der p sind. Ändern sich p_1, p_2, p_3 gleichzeitig, so ist

$$ds^2 = e_1^2 dp_1^2 + e_2^2 dp_2^2 + e_3^2 dp_3^2.$$

Das Flächenelement, welches man erhält, wenn bei konstantem

1) Wegen dieser Nummer vgl. man z. B. R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis S. 54, Leipzig 1905, B. G. Teubner.

p_1 sich p_2 und p_3 um dp_2 resp. dp_3 ändern, hat den Inhalt

$$d\sigma_{p_1} = e_2 e_3 \, dp_2 \, dp_3 .$$

Entsprechende Bedeutung haben die Flächenelemente

$$d\sigma_{p_2} = e_3 e_1 \, dp_3 \, dp_1 , \quad d\sigma_{p_3} = e_1 e_2 \, dp_1 \, dp_2 .$$

1. Kugelkoordinaten. Die Gleichungen

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi , \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi , \quad z = r \cos \vartheta$$

stellen Kugelkoordinaten dar. r ist der Abstand des Punktes xyz vom Koordinatenanfangspunkt, ϑ ist der Winkel, den der Radiusvektor r mit der Polarachse bildet, φ ist der Winkel, den die durch die Polarachse und r gelegte Ebene mit einer festen Ebene einschließt.

Ohne weitere Rechnung ergibt sich durch die geometrische Anschauung

$$ds_r = dr ; \quad ds_\vartheta = r d\vartheta ; \quad ds_\varphi = r \sin \vartheta d\varphi ,$$

also

$$e_1 = 1 ; \quad e_2 = r ; \quad e_3 = r \sin \vartheta . \tag{72}$$

Daraus folgt

$$d\sigma_r = r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi ; \; d\sigma_\vartheta = r \sin \vartheta \, d\varphi \, dr ; \; d\sigma_\varphi = r dr d\vartheta . \tag{72'}$$

2. Elliptische Koordinaten. Die Gleichungen

$$\begin{cases} x = a \sqrt{u^2 - 1} \sqrt{1 - v^2} \cos \varphi \\ y = a \sqrt{u^2 - 1} \sqrt{1 - v^2} \sin \varphi \\ z = auv \end{cases} \tag{73}$$

stellen rotationselliptische Koodinaten dar. Man eliminiert v, indem man die ersten beiden Gleichungen quadriert, addiert und durch $a^2(u^2 - 1)$ dividiert, und indem man hierzu die dritte quadrierte und durch $a^2 u^2$ dividierte Gleichung addiert; man erhält so

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2(u^2 - 1)} + \frac{z^2}{a^2 u^2} = 1 .$$

Diese Gleichung stellt aber für $u =$ const ein verlängertes Rotationsellipsoid dar mit der großen Halbachse au und mit der kleinen Halbachse $a\sqrt{u^2 - 1}$. Die Exzentrizität ist

$$\sqrt{a^2 u^2 - a^2(u^2 - 1)} = a .$$

Gibt man u alle möglichen Werte zwischen 1 und ∞, so erhält man eine Schar konfokaler Rotationsellipsoide.

Quadriert man die dritte Gleichung, dividiert sie dann durch a^2v^2 und subtrahiert davon die quadrierten und addierten sowie durch $a^2(1-v^2)$ dividierten ersten beiden Gleichungen, so erhält man

$$\frac{z^2}{a^2v^2} - \frac{x^2+y^2}{a^2(1-v^2)} = 1,$$

d. h. eine Gleichung, welche für $v = \text{const}$ ein Rotationshyperboloid ergibt. Die Exzentrizität ist $\sqrt{a^2v^2 + a^2(1-v^2)} = a$. Variiert man die Konstante v zwischen -1 und $+1$, so erhält man eine Schar konfokaler Rotationshyperboloide; diese sind auch mit den Ellipsoiden konfokal.

Um die Linienelemente zu erhalten, bilden wir

$$dx = a\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\sqrt{1-v^2}\cos\varphi\,du - a\frac{\sqrt{u^2-1}\,v}{\sqrt{1-v^2}}\cos\varphi\,dv - a\sqrt{u^2-1}\sqrt{1-v^2}\sin\varphi\,d\varphi$$

$$dy = a\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\sqrt{1-v^2}\sin\varphi\,du - a\frac{\sqrt{u^2-1}\,v}{\sqrt{1-v^2}}\sin\varphi\,dv + a\sqrt{u^2-1}\sqrt{1-v^2}\cos\varphi\,d\varphi$$

$$dz = av\,du + au\,dv.$$

Durch Quadrieren und Addieren folgt:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$

$$= a^2\frac{u^2-v^2}{u^2-1}\,du^2 + a^2\frac{u^2-v^2}{1-v^2}\,dv^2 + a^2(u^2-1)(1-v^2)\,d\varphi^2.$$

Es ist also

$$(72'') \qquad \begin{cases} e_1 = a\sqrt{\dfrac{u^2-v^2}{u^2-1}}; \\ e_2 = a\sqrt{\dfrac{u^2-v^2}{1-v^2}}; \\ e_3 = a\sqrt{u^2-1}\sqrt{1-v^2}. \end{cases}$$

Wir bilden das Integral $\int \mathfrak{K}_n \, d\sigma$ über die Oberfläche eines Parallelepipeds, welches die Seiten $e_1 dp_1, e_2 dp_2, e_3 dp_3$ hat (Fig. 21).

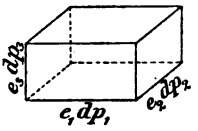

Fig. 21.

Die rechte Seitenfläche, welche die Koordinate $p_1 + dp_1$ hat, trägt dazu bei

$$(\mathfrak{K}_{p_1} e_2 e_3)_{p_1 + dp_1} dp_2 dp_3 ,$$

während die linke Seitenfläche $- \mathfrak{K}_{p_1} e_2 e_3 \, dp_2 \, dp_3$ liefert. Entwickelt man den ersten Term nach dem Taylorschen Satze und addiert ihn zum zweiten Term, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial p_1} (e_2 e_3 \mathfrak{K}_{p_1}) \, dp_1 \, dp_2 \, dp_3 .$$

Durch Berücksichtigung der beiden anderen Paare Seitenflächen ergibt sich

$$\left[\frac{\partial}{\partial p_1} (e_2 e_3 \mathfrak{K}_{p_1}) + \frac{\partial}{\partial p_2} (e_3 e_1 \mathfrak{K}_{p_2}) + \frac{\partial}{\partial p_3} (e_1 e_2 \mathfrak{K}_{p_3})\right] dp_1 \, dp_2 \, dp_3 .$$

Setzt man wegen (66)

$$\mathfrak{K}_{p_1} = - \frac{\partial V}{e_1 \partial p_1}, \quad \mathfrak{K}_{p_2} = - \frac{\partial V}{e_2 \partial p_2}, \quad \mathfrak{K}_{p_3} = - \frac{\partial V}{e_3 \partial p_3},$$

so lautet die Gleichung $\Delta V = 0$

$$(74) \quad \frac{\partial}{\partial p_1} \left(\frac{e_2 e_3}{e_1} \frac{\partial V}{\partial p_1}\right) + \frac{\partial}{\partial p_2} \left(\frac{e_3 e_1}{e_2} \frac{\partial V}{\partial p_2}\right) + \frac{\partial}{\partial p_3} \left(\frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial V}{\partial p_3}\right) = 0 .$$

20. Kugel im gleichförmigen Felde. Diese Gleichung lautet in Kugelkoordinaten nach (72)

$$(75) \quad \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 .$$

Hat die Kugel den Radius a, so lauten die Grenzbedingungen nach (68) und (69): für $r = a$ wird

$$(69') \quad V_i = V_a$$

und

$$(68') \quad \mu \frac{\partial V_i}{\partial r} - \frac{\partial V_a}{\partial r} = (\mu - 1) \mathfrak{H}_{or} .$$

Das ursprüngliche gleichförmige Feld F habe die Richtung der Polarachse, dann ist um diese herum alles symmetrisch, d. h. $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$; ferner ist $\mathfrak{H}_{or} = F \cos \vartheta$, also wird

$$(75') \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) = 0$$

$$(68'') \qquad \mu \frac{\partial V_i}{\partial r} - \frac{\partial V_a}{\partial r} = (\mu - 1) F \cos\vartheta .$$

Diesen Gleichungen suchen wir dadurch zu genügen, daß wir

$$V = R \cos\vartheta$$

setzen, wo R eine Funktion von r allein ist. Dann wird aus (75')

$$(76) \qquad \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} - 2R = 0 .$$

Partikulare Integrale von (76) sind r und $\frac{1}{r^2}$, wie man sich leicht überzeugt, wenn man diese Größen in (76) einsetzt; also ist das vollständige Integral

$$R = C_1 r + \frac{C_2}{r^2},$$

so daß V die Form

$$(77) \qquad V = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r^2}\right) \cos\vartheta$$

hat. Nun muß V für $r = 0$ endlich bleiben, für $r = \infty$ verschwinden; das ist der Fall, wenn im Innern der Kugel $C_2 = 0$ ist, im Außenraum $C_1 = 0$, d. h. wenn

$$V_i = C_1 r \cos\vartheta , \qquad V_a = \frac{C_2}{r^2} \cos\vartheta .$$

C_1 und C_2 bestimmen sich aus (68'') und (69'); aus diesen Gleichungen folgt

$$C_2 = C_1 a^3$$

und

$$\mu C_1 + \frac{2 C_2}{a^3} = (\mu - 1) F,$$

d. h.

$$C_1 = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} F, \qquad C_2 = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 F.$$

Im Innern ist also, da $r \cos\vartheta = z$ ist, $V_i = C_1 z$

$$(78) \qquad \mathfrak{R}_z = - C_1 = - \frac{\mu - 1}{\mu + 2} F,$$

d. h. wir haben in der Kugel ein gleichförmiges Feld in Richtung des ursprünglichen Feldes. Ist μ unendlich groß, so ist $\mathfrak{R}_s = -F$, d. h. für große Werte von μ ist das Zusatzfeld fast gleich und entgegengesetzt gerichtet dem ursprünglichen, also das Gesamtfeld fast Null. Das wirkliche Feld im Innern der Kugel ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{R} = F - \frac{\mu - 1}{\mu + 2} F = \frac{3}{\mu + 2} F$$

und die Induktion

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} = \frac{3\mu}{\mu + 2} F.$$

Für große Werte von μ ändert sich $\frac{3\mu}{\mu + 2}$ nur sehr wenig mit μ, denn dieser Ausdruck ist immer genähert 3. Das macht die Kugel ungeeignet zur Bestimmung von großen Permeabilitäten.

Für paramagnetische Körper $(\mu > 1)$ ist $\frac{3\mu}{\mu + 2} > 1$, für diamagnetische $(\mu < 1)$ ist $\frac{3\mu}{\mu + 2} < 1$, d. h. in paramagnetischen Kugeln ist die Induktionsliniendichte größer als die ursprüngliche in der Luft, die Induktionslinien werden in den Körper „hineingesogen"; das Umgekehrte gilt von diamagnetischen Körpern.

Nach (48) S. 32 ist

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}}{4\pi} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathfrak{H} = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} F,$$

oder, wenn wir den Entmagnetisierungskoeffizienten P wieder, wie in (64) S. 38 durch $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - P\mathfrak{M}$ definieren, so folgt für den Entmagnetisierungskoeffizienten

$$P = \frac{4\pi}{3}.$$

Da dieser für die Kugel einen so großen Wert hat, so ist bei Materialien mit großem μ das Feld im Innern der Kugel immer sehr klein im Vergleich zum äußeren Felde.

21. Hohlkugel im gleichförmigen Felde. Bringen wir eine Hohlkugel mit den Radien a_1 und a_2 (Fig. 22) in ein gleichförmiges Feld $\mathfrak{H}_0 = F$, so gelten an den Oberflächen der Hohlkugel die Bedingungen: Für $r = a_1$

$$V_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{II}}$$

$$\mu \frac{\partial V_{\mathrm{II}}}{\partial r} - \frac{\partial V_{\mathrm{I}}}{\partial r} = (\mu - 1) F \cos \vartheta$$

und für $r = a_2$

$$V_{II} = V_{III}$$

$$\mu \frac{\partial V_{II}}{\partial r} - \frac{\partial V_{III}}{\partial r} = (\mu - 1) F \cos \vartheta .$$

V hat in allen drei Raumteilen die Form der Gleichung (77). Wegen der Endlichkeitsbedingungen für $r = 0$ und $r = \infty$ muß also sein

$$V_I = C_1 r \cos \vartheta = C_1 z$$

$$V_{II} = C_2 r \cos \vartheta + \frac{C_3}{r^2} \cos \vartheta$$

$$V_{III} = \frac{C_4}{r^2} \cos \vartheta .$$

Die Konstanten bestimmen sich wiederum aus den Grenzbedingungen. Daraus folgt das Zusatzfeld $\mathfrak{R}_z = -\frac{\partial V_I}{\partial z} = -C_1$ im Innern des Hohlraumes und schließlich das Feld im Hohlraume

$$\mathfrak{H} = F - C_1 = F \frac{1}{1 + \frac{2}{9} \frac{(\mu - 1)^2}{\mu} \left(1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right)};$$

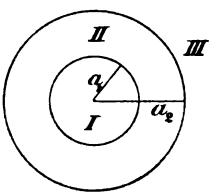

Fig. 22.

es ist also gleichförmig. Ist μ sehr groß, so wird das Feld im Innern sehr klein, um so mehr, je kleiner $\frac{a_1}{a_2}$ ist, d. h. je dicker die Wandung gegen den Durchmesser ist. Auf dieser Tatsache beruht die magnetische Schutzwirkung durch eine Hülle aus weichem Eisen.

22. Verlängertes Rotationsellipsoid im gleichförmigen Felde. Bringt man ein verlängertes Rotationsellipsoid in ein gleichförmiges Feld F', so daß die große Achse in die Feldrichtung fällt, so ist wegen (72″) und (74) die Gleichung zu erfüllen:

$$(78) \qquad \frac{\partial}{\partial u}(u^2 - 1) \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}(1 - v^2) \frac{\partial V}{\partial v} = 0 .$$

Hierbei ist schon berücksichtigt, daß V von φ unabhängig ist. Ferner ist für $u = u_0$

$$V_i = V_a .$$

Die Normalkomponente von $\mathfrak{H}_0$ an der Oberfläche des Ellipsoids ist

$$F\cos(nz) = F\frac{\partial z}{\partial n} = F\frac{\partial z}{e_1\partial u},$$

weil $dn = e_1 du$ ist. Also wird aus (68)

$$(68''') \qquad \mu\frac{\partial V_i}{\partial u} - \frac{\partial V_a}{\partial u} = (\mu-1)F\frac{\partial z}{\partial u} = a(\mu-1)Fv.$$

Wir setzen versuchsweise in (78)

$$V = Uv$$

ein, wo U eine reine Funktion von u ist, und erhalten für U die Differentialgleichung

$$(79) \qquad \frac{d}{du}(u^2-1)\frac{dU}{du} - 2U = 0.$$

Partikulare Integrale von (79) sind $U = u$ und

$$U = \frac{u}{2}\lg\frac{u-1}{u+1} + 1.^{1})$$

Der Ansatz $V = Uv$ und das partikulare Integral $U = u$ sind keineswegs erraten. Der Ansatz $V = Uv$ wird durch die Form von (68‴) nahegelegt, weil sich v dann aus der Grenzbedingung heraushebt. Ferner muß $U = u$ ein Integral von (79) sein, weil $V = Uv = uv$ ein Integral von $\Delta V = 0$ ist, denn $auv = z$ befriedigt als lineare Funktion der Koordinaten die Laplacesche Gleichung.

Die allgemeine Lösung hat die Form

$$V = C_1 uv + C_2\left[\frac{u}{2}\lg\frac{u-1}{u+1} + 1\right]v.$$

Zunächst muß im Außenraum $C_1 = 0$ sein, da im Unendlichen $u = \infty$ wird, wie aus (73) folgt, während V dort verschwinden muß wie $\frac{1}{R^2}$. Dagegen muß im Innern $C_2 = 0$ sein, da auf der Verbindungslinie der Brennpunkte nach (73) $u = 1$ ist, und dort

1) Wenn man das eine partikulare Integral $U = u$ kennt, kann man das andere systematisch durch Quadraturen finden. Vgl. z. B. H. Weber, Partielle Differentialgleichungen **1**, S. 130. Braunschweig 1900.

der Faktor von C_2 unendlich würde. Wir haben also

$$V_i = C_1 u v, \quad V_a = C_2 \left[\frac{u}{2} \lg \frac{u-1}{u+1} + 1\right] v.$$

C_1 und C_2 bestimmen sich aus den Grenzbedingungen.

Für $u = u_0$ muß

$$C_1 u_0 = C_2 \left[\frac{u_0}{2} \lg \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} + 1\right],$$

$$\mu C_1 - C_2 \left[\frac{1}{2} \lg \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} + \frac{u_0}{u_0^2 - 1}\right] = a(\mu - 1) F$$

sein.

Nun ist $V_i = C_1 u v = \frac{C_1}{a} z$, also $\mathfrak{R}_z = -\frac{C_1}{a}$ im Innern, d. h. es kommt zu $\mathfrak{H}_0$ ein gleichförmiges Feld hinzu. So berechnet sich

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - \frac{C_1}{a},$$

und es zeigt sich, daß $\mathfrak{H}$ wieder in die Form

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - P\mathfrak{M}$$

gebracht werden kann, wo der Entmagnetisierungskoeffizient

$$P = 4\pi (u_0^2 - 1) \left[\frac{u_0}{2} \lg \frac{u_0 + 1}{u_0 - 1} - 1\right] \tag{80}$$

nur von den Dimensionsverhältnissen des Ellipsoids abhängig ist.

Die große Halbachse ist nämlich (vgl. S. 40) $A = a u_0$, die kleine Halbachse $B = a\sqrt{u_0^2 - 1}$, also ist $u_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2 - B^2}}$.

Ist A sehr groß gegen B, so wird genähert

$$u_0 = 1 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{A^2}$$

und

$$P = 4\pi \frac{B^2}{A^2} \left[\lg \frac{2A}{B} - 1\right]. \tag{80'}$$

Für sehr gestreckte Formen nähert sich P der Null. Ist das Rotationsellipsoid beinahe eine Kugel, d. h. ist $\frac{A - B}{A} = \varepsilon$ eine sehr kleine Zahl, so wird $P = \frac{4\pi}{3}(1 - \frac{4}{5}\varepsilon)$.

Dieser Wert geht für $\varepsilon = 0$ tatsächlich in den für die Kugel gültigen über. Wegen des kleinen Entmagnetisierungskoeffizienten eignet sich ein langgestrecktes Rotationsellipsoid besonders gut zur Messung der Permeabilität, wie wir später noch genauer sehen werden.

Das Zusatzfeld in der Verlängerung der großen Achse ist

$$-\left(\frac{\partial V_a}{e_1 \partial u}\right)_{v=1} = -\frac{C_2}{a}\left[\frac{1}{2}\lg\frac{u-1}{u+1} + \frac{u}{u^2-1}\right]$$

$$= (\mu - 1)\,\mathfrak{H}\,u_0\,(u_0^2 - 1)\left[\frac{1}{2}\lg\frac{u-1}{u+1} + \frac{u}{u^2-1}\right];$$

es ist also proportional der Magnetisierung $\mathfrak{M}$ im Innern, und zwar ist

$$(80'') \qquad \mathfrak{K}_a = 4\pi\mathfrak{M}\,u_0\,(u_0^2 - 1)\left[\frac{1}{2}\lg\frac{u-1}{u+1} + \frac{u}{u^2-1}\right].$$

Ist das Ellipsoid sehr gestreckt und der Abstand R des fraglichen Punktes vom Mittelpunkt groß gegen die große Achse, so ist

$$u_0 = 1 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{A^2}; \quad u = \frac{R}{A},$$

also

$$(80''') \qquad \mathfrak{K}_a = \frac{2\mathfrak{M}V}{R^3}\left(1 + \frac{6}{5}\frac{A^2}{R^2}\right),$$

wenn V das Volumen des Ellipsoids bedeutet.

Man mißt das Zusatzfeld $\mathfrak{K}_a$, welches auftritt, wenn man in ein bekanntes Feld $\mathfrak{H}_0$ ein gestrecktes Rotationsellipsoid bringt, und berechnet nach der Formel (80''') $\mathfrak{M}$. Das Feld $\mathfrak{H}$ im Innern des Ellipsoids berechnet sich dann aus der Formel $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - P\mathfrak{M}$, und so erhält man zusammengehörige Werte von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{M}$.

Es läßt sich auch zeigen, daß, wenn ein verlängertes Rotationsellipsoid mit seiner Rotationsachse senkrecht zu einem gleichförmigen Felde gestellt wird, im Ellipsoid ein gleichförmiges Feld $\mathfrak{H}$ entsteht.

In diesem Falle lautet die Gleichung $\Delta V = 0$, da V jetzt nicht mehr von φ unabhängig ist, nach (72'') und (74)

$$\frac{\partial}{\partial u}(u^2-1)\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}(1-v^2)\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{u^2-v^2}{(u^2-1)(1-v^2)}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Die Grenzbedingungen sind, wenn das ursprüngliche Feld F die

Richtung der x-Achse hat, für $u = u_0$:

$$V_i = V_a$$

$$\mu \frac{\partial V_i}{e_1 \partial u} - \frac{\partial V_a}{e_1 \partial u} = (\mu - 1) F \frac{\partial x}{e_1 \partial u},$$

oder

$$\mu \frac{\partial V_i}{\partial u} - \frac{\partial V_a}{\partial u} = (\mu - 1) Fa \sqrt{\frac{1 - v^2}{u_0^2 - 1}} u_0 \cos \varphi.$$

Wegen der Form der letzten Gleichung setzen wir versuchsweise an

$$V = U \sqrt{1 - v^2} \cos \varphi,$$

wo U eine reine Funktion von u sein soll, und erhalten für U die Differentialgleichung

$$\frac{d}{du}(u^2 - 1) \frac{dU}{du} + \frac{1 - 2u^2}{u^2 - 1} U = 0.$$

Ein partikulares Integral für U muß

$$U_1 = \sqrt{u^2 - 1}$$

sein, da

$$V = U \sqrt{1 - v^2} \cos \varphi = \sqrt{u^2 - 1} \sqrt{1 - v^2} \cos \varphi = \frac{x}{a}$$

sicher der Laplaceschen Gleichung genügt.

Daraus folgt das zweite partikulare Integral (vgl. Fußnote S. 46)

$$U_2 = \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} - \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{2} \lg \frac{u + 1}{u - 1},$$

und es ist

$$U_i = C_1 U_1, \qquad U_a = C_2 U_2.$$

Aus den Grenzbedingungen ergeben sich die Werte für die Konstanten C_1 und C_2, und es zeigt sich, daß sich $\mathfrak{H}$ immer in die Form bringen läßt

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - P' \mathfrak{M},$$

wo der Entmagnetisierungskoeffizient

$$P' = 2\pi u_0 \left\{ u_0 - \frac{u_0^2 - 1}{2} \lg \frac{u_0 + 1}{u_0 - 1} \right\}$$

immer größer als der Koeffizient P für Felder parallel der großen Achse ist, denn, wie man leicht sieht, ist

$$P \leqq \frac{4\pi}{3}, \qquad P' \geqq \frac{4\pi}{3}.$$

Kapitel III.

Ferromagnetische Körper.

23. Die Permeabilität. Als ferromagnetisch bezeichnet man alle die Körper, bei denen $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}}$ nicht konstant, sondern von $\mathfrak{H}$ abhängig ist. Besonders sind das Eisen, Stahl, Nickel, Kobalt und Legierungen dieser Metalle.

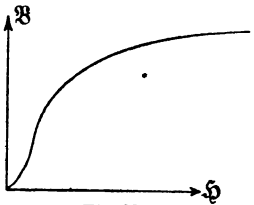

Fig. 23.

Man hat bis jetzt keine Formel, welche die Beziehung der Größe $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{H}$ ausdrückt, aber man kann empirisch diese Abhängigkeit festlegen. Ist das Material zunächst unmagnetisch, und erzeugt man in demselben ein gleichförmiges Feld $\mathfrak{H}$, so entsteht eine Induktion $\mathfrak{B}$ von derselben Richtung. Trägt man zusammengehörige Werte von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ in einem Diagramm auf, so erhält man eine Kurve wie in Fig. 23. Die Kurve hat für verschiedene Materialsorten ganz verschiedenen Verlauf, sie geht aber immer durch den Nullpunkt der $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$-Ebene, ist zuerst konkav nach oben, nachher konvex nach oben, und $\mathfrak{B}$ wächst mit $\mathfrak{H}$ über alle Grenzen, doch so, daß $\lim_{\mathfrak{H}=\infty} \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} = 1$ wird.

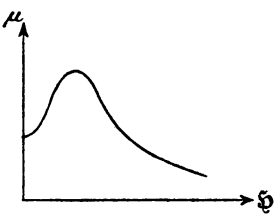

Fig. 24.

Da die Werte von $\mathfrak{B}$ so entstanden sind, daß das Material ursprünglich unmagnetisch war, d. h. $\mathfrak{B}$ uud $\mathfrak{H}$ gleichzeitig Null waren, so heißt diese Kurve die jungfräuliche Kurve. Man nennt auf ihr noch immer $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} = \mu$ die Permeabilität; diese hängt von $\mathfrak{H}$ ab, und zwar in der Art, wie es Fig. 24 ungefähr angibt.

Die jungfräuliche Kurve kann folgendermaßen bestimmt werden: Um einen Ring vom Querschnitt σ und der Länge l seien N_1

(Primär-)Windungen gelegt; eine Sekundärwicklung von N_2 Windungen befinde sich darüber oder noch besser darunter, damit zwischen den Sekundärwindungen und dem Ring kein Zwischenraum ist; die Sekundärwicklung sei mit einem ballistischen Galvanometer verbunden.

Schließt man plötzlich den Strom i in der Primärspule, so entsteht das berechenbare Feld

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi N_1 i}{l}.$$

Fließt dabei die Elektrizitätsmenge e durch die Sekundärleitung vom Widerstand w, so ist der Induktionsfluß (vgl. (16) S. 14)

$$\mathfrak{B}\sigma = -ew,$$

es ist also durch das Feld $\mathfrak{H}$ die berechenbare Induktion

$$\mathfrak{B} = -\frac{ew}{\sigma}$$

entstanden. So ordnet man $\mathfrak{B}$- und $\mathfrak{H}$-Werte einander zu.

Anstatt eines Ringes kann man einen zylindrischen Stab benutzen, den man durch Einklemmen in ein Schlußjoch zu einem magnetischen Kreise vervollständigt (vgl. Nr. **18**).

Besteht schon ein bekannter Wert $\mathfrak{B}$ im Eisen, so kann man plötzlich $\mathfrak{H}$ vergrößern, wodurch $\mathfrak{B}$ einen Zuwachs erhält, der durch das ballistische Galvanometer gemessen wird; addiert man diesen Zuwachs von $\mathfrak{B}$ zum vorigen Wert, so bekommt man für das neue $\mathfrak{H}$ die Induktion $\mathfrak{B}$. In dieser Weise kann man fortfahren, indem man, vom Felde Null anfangend, die Feldstärken sprungweise wachsen läßt. Diese Methode hat den Nachteil, daß ein Fehler, der bei der Induktionsmessung an irgendeiner Stelle gemacht wird, alle folgenden Werte beeinflußt.

Deshalb kann man auch den in der Primärwindung fließenden Strom i plötzlich kommutieren; dadurch werden die Richtungen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ umgekehrt, und es tritt eine Änderung im Induktionsfluß vom Betrage $2\mathfrak{B}\sigma$ ein, und zwar kommutiert man vor der Messung den Strom i zuerst einige Male, um von der Art, in der der Strom i eingeschaltet wurde, ganz unabhängig zu sein. Die durch dieses Verfahren bestimmte Kurve heißt die **aufsteigende Kommutierungskurve**, falls man von kleineren zu größeren $\mathfrak{H}$-Werten fortschreitet. Sie ist von der nach der vorigen Methode ermittelten Kurve etwas verschieden, denn es zeigt sich, daß die

Werte von $\mathfrak{B}$, besonders bei magnetisch weichem Material, etwas von der Größe der Sprünge abhängig sind, die $\mathfrak{H}$ erfährt.[1])

24. Hysteresis. Ist man bis zu einem bestimmten Werte von $\mathfrak{H}$ gekommen und schwächt plötzlich den Strom, so tritt ein Induktionsstoß von entgegengesetzter Richtung ein, aber die Stärke desselben ist nicht dieselbe, wie sie war, als man von dieser kleineren Feldstärke plötzlich zur größeren überging, d. h. die Induktion hat nicht um denselben Betrag abgenommen wie vorher zugenommen. Die Werte von $\mathfrak{B}$ sind also nicht Funktionen von $\mathfrak{H}$, sondern hängen mit von der Vorgeschichte ab.

Man lasse das Feld bis $+\mathfrak{H}$ wachsen und es dann bis 0 und darüber hinaus bis $-\mathfrak{H}$ abnehmen, dann wieder bis 0 und darüber hinaus bis $+\mathfrak{H}$ wachsen und wiederhole diesen Prozeß einige Male; dann zeigt sich, daß $\mathfrak{B}$ in ganz bestimmter Weise von $\mathfrak{H}$ abhängt, die durch Fig. 25 dargestellt ist.

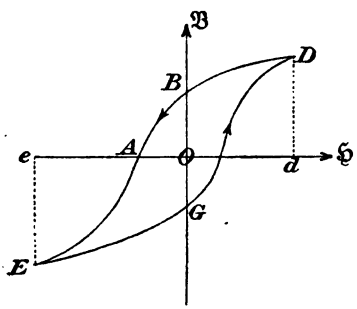

Fig. 25.

Die Kurve Fig. 25 heißt die Hysteresisschleife, denn die Erscheinung der Beeinflussung der späteren Werte durch die früheren nennt man Hysteresis.

Wenn die positiven und negativen Maximalwerte der Feldstärke Od und Oe einander gleich sind, so sind auch die Maximalwerte Dd und Ee der Induktionen einander gleich, und man spricht von einem vollkommenen Zyklus zum Unterschiede von unvollkommenen Zyklen. Den Kurventeil $DBAE$, der bei abnehmenden $\mathfrak{H}$ Werten die $\mathfrak{B}$ Werte gibt, nennt man den absteigenden Hysteresisast; EGD gibt die $\mathfrak{B}$ Werte für wachsende $\mathfrak{H}$; dieser Teil heißt der aufsteigende Hysteresisast. Der links von der Ordinatenachse liegende Teil der Fläche, die durch die Hysteresiskurve eines vollständigen Zyklus eingeschlossen ist, kann mit dem rechts von der Ordinatenachse liegenden Flächenteil durch Drehung um 180^0 und Parallelverschiebung zur Deckung gebracht werden.

Ist das abnehmende Feld Null geworden, so ist wie Fig. 25

1) E. Gumlich und Erich Schmidt, Elektrotechn. Zeitschr. **21**, 233, 1900.

zeigt, noch eine Induktion im Betrage OB vorhanden, die sogenannte Remanenz oder remanente Induktion.

Anstatt $\mathfrak{B}$ kann man auch, wie das vielfach üblich ist, die Magnetisierung $\mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{B} - \mathfrak{H})$ als Ordinate auftragen, und bekommt eine ähnlich gestaltete Kurve (Fig. 26). Während aber $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{H}$ über alle Grenzen wächst, wird $\mathfrak{M}$ bei großen $\mathfrak{H}$-Werten konstant, es tritt Sättigung ein. OR heißt die remanente Magnetisierung; da $\mathfrak{H}$ für diese Null ist, so ist sie einfach der $4\pi^{te}$ Teil der remanenten Induktion. OC heißt die Koerzitivkraft, sie ist definiert als diejenige negative Feldstärke, welche die Magnetisierung Null gibt, nachdem vorher eine sehr große (unendlich große) positive Magnetisierung (Sättigung) erzeugt war. Es ist zu beachten, daß die Koerzitivkraft meistens aus der $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$-Kurve und nicht aus der $\mathfrak{B}\mathfrak{H}$-Kurve definiert wird, denn für $\mathfrak{M} = 0$ ist nicht etwa $\mathfrak{B} = 0$, sondern $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, aber praktisch weichen die Feldstärken OA (Fig. 25) und OC (Fig. 26) kaum merklich voneinander ab.

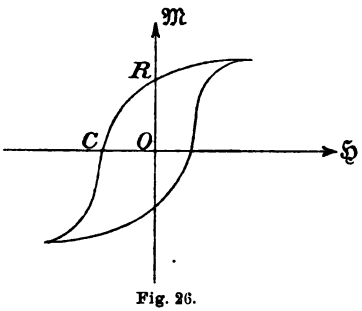

Fig. 26.

Wenn die Fläche der Hysteresisschleife klein ist, so spricht man von magnetisch weichem Material, ist sie groß, nennt man das Material hart. Ob ein Material hart oder weich ist, hängt hauptsächlich von der Größe der Koerzitivkraft und erst in zweiter Linie von der Größe der Remanenz ab.

25. Bestimmung der Magnetisierungskurve. Es zeigt sich, daß — hauptsächlich bei weichem Material — die Form der Kurve nicht nur von der Größe der Sprünge [1]) abhängt, sondern vor allem, daß der Induktionszuwachs nicht momentan mit Anwachsen der Feldstärke vor sich geht, sondern Zeit gebraucht, daß sogenannte magnetische Nachwirkung vorhanden ist.[2]) Das ballistische Galvanometer zeigt aber nur Induktionsänderungen an, die in Zeiten erfolgen, welche klein gegen die Schwingungsdauer des Galvanometers sind.

1) Vgl. S. 52, Fußnote.

2) J. A. Ewing, Phil. Trans. **176**, 1885, p. 569; Proc. Royal Soc. **46**, 1889, p. 269; Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) **23**, 1887, p. 230.

Um dieser Fehlerquelle abzuhelfen, kann man auf den Wert von $\mathfrak{B}$ im Ferromagnetikum aus dem nach Nr. 1 meßbaren Felde in der Luft schließen. Diese Methode hat den Vorteil, daß man die Bestimmung beliebig lange nach Erzeugung der Feldänderung machen, und daß man auch allmählich entstehende Induktionsänderungen noch konstatieren kann.

Denken wir uns z. B. einen geschlitzten Ring aus dem zu untersuchenden Material hergestellt, so tritt nach Nr. 18 (64) und (65) S. 38 im magnetisierten Ferromagnetikum eine Feldstärke

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - P\mathfrak{M} \tag{81}$$

auf, wo $P = 4\pi \frac{l_a}{l_i + l_a}$ den Entmagnetisierungskoeffizienten bedeutet.

$$\mathfrak{H}_0 = \frac{4\pi i N}{l_i + l_a}$$

ist direkt aus der gemessenen Stromstärke berechenbar. Läßt man eine Spule von bekannter Windungsfläche plötzlich aus dem Schlitze herausfallen, so ergibt die durch das Galvanometer fließende Elektrizitätsmenge die Induktion $\mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M}$ ist, kann man (81) auch schreiben

$$\mathfrak{H}\left(1 - \frac{P}{4\pi}\right) = \mathfrak{H}_0 - \frac{P}{4\pi}\mathfrak{B}. \tag{81'}$$

Direkt werden zusammengehörige $\mathfrak{H}_0$ und $\mathfrak{B}$ gemessen; mittels (81') ergibt sich das dazugehörige $\mathfrak{H}$.

Diese Anordnung wird jedoch im allgemeinen nicht gebraucht, da das Feld im Ringe nicht genau konstant ist. Erstens ist nämlich die Feldstärke umgekehrt proportional dem Abstande von der Ringachse, und zweitens ist die Streuung in der Nähe des Schlitzes nicht berücksichtigt, welche die Resultate beträchtlich modifizieren kann.

Wir hatten gesehen, daß das Feld $\mathfrak{H}$ im Innern eines verlängerten Rotationsellipsoids, welches in ein homogenes Magnetfeld $\mathfrak{H}_0$ gebracht wird, gleichförmig ist, wenn μ konstant ist. Aber gerade wegen der Gleichförmigkeit gilt dieselbe Lösung auch für ein ferromagnetisches Ellipsoid, wenn man ihm nur das μ zuschreibt, welches dem $\mathfrak{H}$ im Innern entspricht.

Das Zusatzfeld im Abstande R vom Zentrum des Ellipsoids

auf der Verlängerung der großen Achse ist

$$\mathfrak{H}_a = \frac{2\mathfrak{M}V}{R^3}\left(1 + \frac{6}{5}\frac{A^2}{R^2}\right) \quad \text{(vgl. Nr. 22 S. 48).}$$

Mißt man $\mathfrak{H}_a$, so ergibt sich daraus $\mathfrak{M}$. Da $\mathfrak{H}_0$ bekannt ist, folgt aus (81) $\mathfrak{H}$, denn P läßt sich nach (80) resp. (80′) S. 47 aus den Dimensionen des Ellipsoids berechnen.

Die gebräuchliche Anordnung ist folgende:

S_1 und S_2 (Fig. 27) sind zwei ganz gleichmäßig gewickelte Solenoide, in deren Innern ein gleichförmiges Feld $\mathfrak{H}_0 = 4\pi in$ existiert, wenn der Strom i es durchfließt. Die beiden Spulen werden so hintereinander geschaltet, daß ihre Magnetfelder sich im Punkte Q gerade aufheben. S_2 heißt die Kompensationsspule der Spule S_1. Am Ampèremeter A liest man den mittels des Widerstandes W variierbaren Strom ab. Anstatt ein Ampèremeter in den Stromkreis zu legen, ist es besser, den Strom dadurch zu messen, daß man außer den zur Veränderung des Stromes dienenden Widerständen W einen konstanten Präzisionswiderstand in den Stromkreis einschaltet und an seine Klemmen ein Voltmeter in den Nebenschluß legt; man hat dadurch den Vorteil, durch Stöpseln am Voltmeter die Empfindlichkeit des Meßinstruments verändern zu können, ohne den magnetisierenden Strom auszuschalten.[1]) Bringt man das verlängerte Rotationsellipsoid in die Spule S_1, so kann man das dadurch entstehende Zusatzfeld $\mathfrak{H}_a$ im Punkte Q messen. In Wirklichkeit geschieht das nicht durch die in Nr. 1 beschriebene Anordnung, sondern durch ein sogenanntes Magnetometer, welches wir noch weiter unten zu besprechen haben werden.

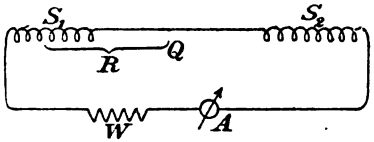

Fig. 27.

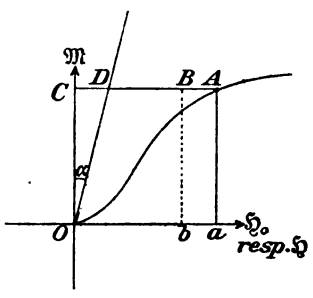

Fig. 28.

Der Strom ergibt $\mathfrak{H}_0 = 4\pi in$, das Feld in Q ergibt $\mathfrak{M}$. Durch sogenannte Scheerung läßt sich aus der $\mathfrak{H}_0\mathfrak{M}$-Kurve die ge-

1) Wegen der Meßmethoden vgl. Erich Schmidt, Magnetische Untersuchung des Eisens etc., Halle 1900.

suchte $\mathfrak{H}\mathfrak{M}$-Kurve folgendermaßen graphisch ableiten. Die Kurve in Fig. 28 stelle das Diagramm $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{M}$ dar. Durch den Nullpunkt des Koordinatensystems legen wir eine Gerade unter dem Winkel α gegen die $\mathfrak{M}$-Achse, der durch die Gleichung $\operatorname{tg}\alpha = P$ gegeben ist. Diese Linie heißt Scheerungslinie. Ziehen wir durch einen Kurvenpunkt A, welcher die Abszisse $\mathfrak{H}_0$ und die Ordinate $\mathfrak{M}$ hat, eine Parallele zur Abszissenachse, so wird auf ihr durch die Ordinatenachse und die Scheerungslinie eine Strecke $CD = \mathfrak{M}\operatorname{tg}\alpha = P\mathfrak{M}$ abgeschnitten. Macht man $BA = CD$, so sind die Koordinaten des Punktes B $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - P\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}$. Auf dieselbe Weise verfährt man mit allen beobachteten Punkten der $\mathfrak{H}_0\mathfrak{M}$-Kurve und erhält so ebensoviele Punkte der $\mathfrak{H}\mathfrak{M}$-Kurve.[1])

Auf S. 44 hatten wir gesehen, daß die Kugelform bei Materialien von großem μ sehr ungeeignet zu Permeabilitätsbestimmungen ist, da $\mathfrak{B} = \frac{3\mu}{\mu+2}F$ oder genähert $\mathfrak{B} = 3\left(1 - \frac{2}{\mu}\right)F$ ist; d. h. auch bei sehr starken Schwankungen von μ bleibt $\mathfrak{B}$ immer genähert $3F$.

Aus der Formel $P = \frac{4\pi}{3}(1 - \frac{4}{5}\varepsilon)$ (vgl. Nr. **22** S. 47 unten) für den Entmagnetisierungskoeffizienten eines verlängerten Rotationsellipsoids, welches beinahe Kugelgestalt hat, erkennt man, daß ein kleiner Fehler in der Kugelform einen größeren Einfluß auf die beobachtete Magnetisierung hat, als große Schwankungen von $\varkappa$, denn aus $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - P\mathfrak{M}$, wo $\mathfrak{M} = \varkappa\mathfrak{H}$ ist, folgt

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{H}_0}{\frac{1}{\varkappa} + P},$$

und in dieser Formel ist für ferromagnetische Kugeln $P = 4\pi/3$ immer groß gegen $1/\varkappa$.

Chrystal hat also recht, wenn er sagt, der Experimentator, der Kugeln zu Permeabilitätsbestimmungen ferromagnetischer Materialien benutze, untersuche mehr die Arbeit seines Mechanikers als die magnetische Suszeptibilität seines Materials.[2])

1) Die Methode der Scheerung stammt von Lord Rayleigh, Phil. Mag. **22**, 175, 1886.

2) G. Chrystal, Encyclopaedia Britannica (9. Ausg.) **15**, 245, 1883 im Artikel „Magnetism"; vgl. auch J. A. Ewing, Magnetische Induktion in Eisen und verwandten Metallen, deutsch von L. Holborn und St. Lindeck, Berlin und München 1892, S. 29.

Ist es einmal notwendig, an einer ferromagnetischen Kugel Per-

Je größer die Suszeptibilität ist, um so kleiner muß zu genauen Messungen der Entmagnetisierungskoeffizient sein, d. h. um so gestrecktere Ellipsoide muß man anwenden. Ist dagegen $\varkappa$ eine sehr kleine Zahl, so daß man P gegen $1/\varkappa$ vernachlässigen kann, so kommt es auf die Körperform überhaupt nicht an. Das gilt nicht nur für Ellipsoide, sondern allgemein, denn $\mathfrak{H}$ ist bis auf ein $\varkappa$ proportionales Glied gleich $\mathfrak{H}_0$, also $\mathfrak{M}$ bis auf Glieder zweiter Ordnung in $\varkappa$ gleich $\varkappa\mathfrak{H}_0$.

26. Die reversible Permeabilität und die wahre Magnetisierung. Kehrt man in einem beliebigen Punkte Q der $\mathfrak{B}\mathfrak{H}$-Kurve die Richtung der Feldänderung, die dem gewöhnlichen Fortschreiten auf der Kurve entsprechen würde, um, erzeugt man also, wenn Q auf einem aufsteigenden Aste liegt, ein Zusatzfeld $-\Delta\mathfrak{H}$, wenn Q auf einem absteigenden Aste liegt, ein Zusatzfeld $+\Delta\mathfrak{H}$ und entfernt dieses Zusatzfeld wieder, und wiederholt diesen Prozeß einige Male, so wird in diesem Bereich $\mathfrak{H} - \Delta\mathfrak{H}$ bis $\mathfrak{H}$ resp. $\mathfrak{H}$ bis $\mathfrak{H} + \Delta\mathfrak{H}$ bei nicht zu großen Werten $\Delta\mathfrak{H}$ schließlich alles umkehrbar, d. h. denselben Feldern innerhalb der angegebenen Grenzen entsprechen immer dieselben Induktionen, und die Zuwächse $d\mathfrak{B}$ sind den Feldänderungen $d\mathfrak{H}$ proportional.

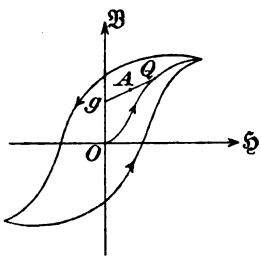

Fig. 29.

Bei diesen reversiblen Änderungen bewegt man sich also auf einer Geraden AQ (Fig. 29), die wir durch die Gleichung

$$\mathfrak{B} = \mu_r\mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M}_w \tag{82}$$

darstellen können, wo μ_r und $\mathfrak{M}_w$ konstant sind. Wir nennen μ_r die reversible Permeabilität, $\mathfrak{M}_w$ die wahre Magnetisierung. $4\pi\mathfrak{M}_w$ ist durch die Strecke Og (Fig. 29) dargestellt, μ_r ist die Tangente des Neigungswinkels der Geraden AQ gegen die Abszissenachse. Aus (82) folgt

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}}{4\pi} = \varkappa_r\mathfrak{H} + \mathfrak{M}_w = \varkappa\mathfrak{H}, \tag{82'}$$

wo $\varkappa_r = \frac{\mu_r - 1}{4\pi}$ die reversible Suszeptibilität bedeutet, während $\varkappa$ schlechthin Suszeptibilität heißt. Die Magnetisierung setzt

meabilitäten zu messen, so beachte man die von R. H. Weber, Ann. Phys. **18**, 395, 1905 angegebenen Kunstgriffe.

sich additiv aus der induzierten Magnetisierung $\varkappa_r \mathfrak{H}$ und der wahren (dauernden) Magnetisierung $\mathfrak{M}_w$ zusammen. Die Beziehungen (82) und (82′) gelten aber wohlgemerkt nur, nachdem der Reversibilitätsprozeß stattgefunden hat, und auch dann nur innerhalb eines nicht allzugroßen Feldstärkenbereiches.

μ_r resp. $\varkappa_r$ sind für jeden Punkt der Magnetisierungskurve nach obiger Meßvorschrift definiert, während $\mu = \mathfrak{B}/\mathfrak{H}$ und $\varkappa = \mathfrak{M}/\mathfrak{H}$ nur für die jungfräuliche Kurve definiert sind.

27. Permanente Magnete. Wenn man ein Ellipsoid in ein Solenoid steckt, einen starken Strom einschaltet und diesen dann wieder ausschaltet, so ist, wenn kein Strom durch das Solenoid fließt, im Innern des Ellipsoids

$$\mathfrak{H} = -P\mathfrak{M}, \tag{83}$$

da $\mathfrak{H}_0 = 0$ ist (vgl. (81)), d. h. wir befinden uns auf dem Punkte Q der Magnetisierungskurve, den man erhält, wenn man unter dem Winkel α gegen die Ordinatenachse eine Gerade durch den Ursprung legt, so daß $\operatorname{tg}\alpha = P$ ist (Fig. 30), und diese Gerade mit der Kurve zum Schnitt bringt. Die Gerade liegt, wie Fig. 30 zeigt, im zweiten Quadranten der $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$-Ebene.

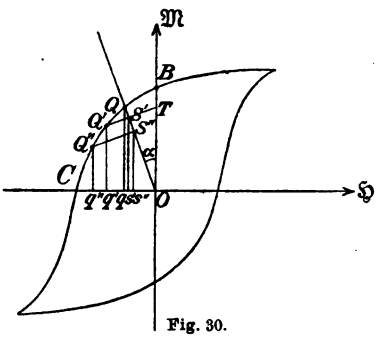

Fig. 30.

Je gedrungener die Form des Ellipsoids ist, um so größer ist P, um so kleiner wird $\mathfrak{M}$ (vgl. Fig. 30) und damit das äußere Feld (vgl. Nr. **22** (80″)). Um starke permanente Magnete zu erhalten, muß man also ein Material wählen, welches außer einer großen Remanenz OB auch eine große Koerzitivkraft OC hat, damit die Kurve von B bis C nicht zu steil abfällt. Ein Wachsen der Koerzitivkraft kommt um so mehr günstig in Betracht, je größer P ist, d. h. je gedrungener das Ellipsoid ist, resp. je größer der Schlitz eines Hufeisenmagneten gegenüber seiner Länge ist.

Wie in jedem Punkte der Magnetisierungskurve, so lassen sich speziell im Punkte Q (Fig. 30) innerhalb eines bestimmten Bereiches reversible Änderungen von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ durch die Formel (82) darstellen.

Ein permanenter Magnet, dessen Magnetisierung durch Q gegeben ist, wäre magnetisch sehr labil, da ein zufälliges Anwachsen

des im Innern des Magneten befindlichen Feldes Oq auf Oq' durch störende äußere Felder sofort den definierenden Punkt Q des Magneten nach Q' rücken lassen würde. Verschwindet das störende Feld wieder, so rückt Q' nicht etwa wieder nach Q, sondern auf der Geraden, welche durch die im Punkte Q' geltende Gleichung (82) gegeben ist, verschiebt sich der definierende Punkt nach rechts, bis er die Gerade OQ in S' trifft; denn ohne (störendes) äußeres Feld muß der definierende Punkt immer auf der durch (83) gegebenen Geraden liegen.

Durch diese Störung ist eine andere wahre Magnetisierung hervorgerufen, als die vorher existierende maximale, der Magnet hat jetzt aber eine größere Stabilität als früher, weil störende Felder bis zur Größe $q'S'$ jetzt den definierenden Punkt reversibel auf der Geraden $Q'S'T$ verschieben lassen.

Deshalb kann man permanente Magnete so herstellen, daß man nicht den starken positiven magnetisierenden Strom einfach ausschaltet, sondern noch einen schwachen negativen Strom einschaltet, wodurch man nach Q'' kommt. Wird der negative Strom wieder ausgeschaltet, so befindet man sich auf der Geraden (83) in S'', und jetzt können störende Zusatzfelder bis zum Betrage $q''s''$ auftreten, ohne daß der Magnet aufhört, durch die im Punkte Q'' geltende Gleichung (82) definiert zu sein. Durch diesen Prozeß der Stabilierung wird allerdings die wahre Magnetisierung stark herabgedrückt; es ist derselbe Vorgang, der durch störende Felder beim natürlichen Altern dem Zufall überlassen bleibt, oder der durch die Methoden des künstlichen Alterns[1]) (Erhitzen) umständlicher hervorgerufen wird[2]).

Die hier angestellten Betrachtungen gelten in Strenge nur, wenn die Zusatzfelder qq'' nicht zu groß gewählt werden. Sonst ist nämlich die Kurve, auf der der Punkt sich von Q'' nach der Linie (83) bewegt, keine Gerade mehr, und die Reversibilität hört auf. Formel (82) hat eben nur einen beschränkten Gültigkeitsbereich.

Wahrer und freier Magnetismus. $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$ läßt aus der Gleichung (82)

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = -4\pi \operatorname{div} \mathfrak{M}_w - \operatorname{div} (\mu_r - 1)\mathfrak{H} \tag{84}$$

1) Vgl. V. Strouhal und C. Barus, Ann. Phys. Chem. **20**, 662, 1883

2) Im hier geschilderten Sinne wurden die bei permanenten Magneten auftretenden Verhältnisse besonders von H. du Bois und Taylor Jones, Elektrotechn. Zeitschr. 1896, 543 geklärt.

folgern. Bezeichnen wir die rechte Seite mit $4\pi\varrho_0$ und nennen ϱ_0 die freie magnetische Dichte, so ist diese nach (84) definiert durch

$$\text{(84')} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 4\pi\varrho_0 .$$

Da $\mathfrak{H}$ sich nach Nr. 9 (22) S. 19 aus einem Potential U ableitet, also $\mathfrak{H}_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$ ist, so ist

$$\text{(85)} \qquad \Delta U = -4\pi\varrho_0 ,$$

woraus nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie[1])

$$\text{(86)} \qquad U = \int \frac{\varrho_0}{r}\, dS$$

folgt. Hier bedeutet ϱ_0 die freie Dichte in dem variablen Punkte $P'(x'y'z')$ des Raumes S; r ist der Abstand des Punktes $P(xyz)$, in dem das Potential U gesucht wird, von P', also

$$r = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2} .$$

Die freie Dichte ist nach (84) nicht konstant, wenn mehrere Magnete im Felde sind und z. B. durch Bewegungen derselben gegeneinander die Feldstärke $\mathfrak{H}$ im Innern sich ändert. Konstant ist aber $\varrho = -\operatorname{div}\mathfrak{M}_w$, die wahre magnetische Dichte, zu der die variable induzierte Dichte $-\operatorname{div}\frac{\mu_r - 1}{4\pi}\mathfrak{H}$ hinzutritt. Diese setzt sich zusammen aus der durch das eigene Feld des Magneten auf sich selbst induzierten Dichte und der durch das Feld anderer Magnete induzierten Dichte. Wenn die Magnete sehr weit auseinander liegen, so daß das fremde Feld im Raume eines Magneten nur klein ist, so ist ϱ_0 mit großer Annäherung konstant.

In der von Gauß[2]) gewählten Darstellung wird die freie magnetische Dichte als konstant im Magneten angesehen; das wäre nur der Fall, wenn die reversible Suszeptibilität permanenter Magnete gleich Null wäre, weil dann die induzierte Dichte $-\operatorname{div}\varkappa_r\mathfrak{H}$ verschwinden würde. Das entspricht aber keineswegs den Tatsachen; die reversible Suszeptibilität ist eine endliche Größe.[3])

1) Vgl. z. B. H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik **1**, Braunschweig 1900, S. 237.

2) C. F. Gauß, Die Intensität der erdmagnetischen Kraft, auf absolutes Maß zurückgeführt. Ostw. Klass. **53**; herausgegeben von E. Dorn, Leipzig 1894.

3) Vgl. R. Gans, Ann. Phys. **22**, 481, 1907. Der Einfluß der

Wenn trotzdem die unter Annahme konstanter freier Dichte berechneten Resultate manchmal mit großer Näherung richtig sind, so liegt das an der speziellen Versuchsanordnung: Die Magnete liegen so weit auseinander, daß das fremde Feld im Raume der Magnete nur sehr klein ist. Man darf aber daraus, daß die Versuche mit den so erhaltenen Rechenergebnissen übereinstimmen, nicht schließen, daß $\varkappa_r$ tatsächlich Null ist; jeder beliebige, nicht zu große Wert von $\varkappa_r$ würde Übereinstimmung ergeben.

Ich kann deshalb Abraham[1]) nicht beistimmen, der die Permeabilität permanenter gesättigter Magnete gleich 1 setzt und diese Magnete „vollkommen hart" nennt — es gibt keine Magnete dieser Eigenschaft —; er erweckt dadurch den Anschein, als ob man es mit einer besonderen Materialbeschaffenheit zu tun hätte, während man es in Wahrheit nur mit einer besonderen räumlichen Anordnung zu tun hat; man glaubt auf Grund seiner Darstellung, permanente Magnete seien nicht induzierbar, während tatsächlich bei großen gegenseitigen Entfernungen der Magnete einfach nichts (oder wenig) induziert wird.

Wir wollen annehmen, daß die bei gleichförmigen Feldern geltende Beziehung $\mathfrak{B} = \mu_r \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{M}_w$ auch noch besteht, wenn $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{M}_w$ räumlich variabel sind und nicht dieselbe Richtung haben.

Da div $\mathfrak{B} = 0$ ist, muß div $\mu_r \mathfrak{H} = -4\pi$ div $\mathfrak{M}_w$ sein, d. h. der Vektor $\mu_r \mathfrak{H}$ hat Anfangs- und Endpunkte, und zwar ist in jedem Volumelement die Zahl der Anfangs-(End-)punkte des Vektors $\mu_r \mathfrak{H}$ 4π mal der Zahl End-(Anfangs-)punkte des Vektors $\mathfrak{M}_w$. Multiplizieren wir diese Gleichung mit dS und wenden auf die linke Seite die für jeden beliebigen Vektor gültige Formel (21) in Nr. 7 S. 16 an, so folgt $\mu_r \mathfrak{H}_n d\sigma = -4\pi$ div $\mathfrak{M}_w \cdot dS = 4\pi \varrho dS = 4\pi dm$, wenn $\varrho = -$ div $\mathfrak{M}_w$ die wahre magnetische Dichte, $m = \int \varrho \, dS$ die wahre Magnetismusmenge bedeutet; d. h. die Zahl der aus einer beliebigen unendlich kleinen geschlossenen Fläche heraustretenden $\mu_r \mathfrak{H}$-Linien ist gleich der 4πfachen Menge des wahren Magnetismus, welcher von der Fläche eingeschlossen wird.

Permeabilität permanenter Magnete auf das von diesen Magneten erzeugte Feld wurde berücksichtigt von F. Kohlrausch, Ann. Phys. Chem. **22**, 411, 1884; H. Sack, ibid. **29**, 53, 1886; E. Dorn, ibid. **35**, 189, 270 u. 275, 1888.

1) M. Abraham und A. Föppl, Theorie der Elektrizität **1**, 3. Aufl. 1907, S. 381.

Wir hatten in Formel (21) Nr. 7 gesehen, daß bei einem unendlich kleinen Parallelepiped für einen beliebigen, stetigen Vektor $\mathfrak{A}$ gilt

$$\operatorname{div} \mathfrak{A}\, dS = \int \mathfrak{A}_n\, d\sigma .$$

Denken wir uns einen endlichen Raum S mit der Oberfläche σ durch Ebenen in lauter unendlich kleine Parallelepipeda zerlegt (Fig. 31) und wenden auf jedes obige Formel an, so heben sich bei der Addition der rechten Seiten der Gleichungen alle im Innern liegenden Oberflächen fort, weil n die Richtung der äußeren Normalen bedeutet und infolgedessen jede Oberfläche im Innern zweimal mit entgegengesetzten Vorzeichen in Rechnung zu ziehen ist, da sie eine Grenzfläche von zwei aneinanderstoßenden Parallelepipeda ist. Bei der Summe kommen also nur die von der Oberfläche des Raumes herrührenden Terme in Betracht, und es folgt für jeden endlichen Raum

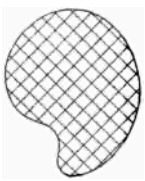

Fig. 31.

$$\int \mathfrak{A}_n\, d\sigma = \int \operatorname{div} \mathfrak{A}\, dS .$$

Diese Formel heißt der Gaußsche Integralsatz.[1])

So ergibt sich, daß für jede beliebige geschlossene Fläche σ, welche die wahre magnetische Menge m einschließt,

$$\int \mu_r \mathfrak{H}_n\, d\sigma = 4\pi m$$

ist. Es ist aber $\int \mathfrak{B}_n\, d\sigma = 0$. Ferner ist $\mathfrak{M}_w$ nur im Innern von Magneten von Null verschieden; für eine Fläche, welche einen Magneten eng umgibt, ist also bereits $\int \mathfrak{M}_n\, d\sigma = 0$, also folgt, daß für diese Fläche auch $\int \mu_r \mathfrak{H}_n\, d\sigma = 0$ ist, d. h. *die Gesamtmenge des wahren Magnetismus in jedem Magneten ist Null.*

Das Feld permanenter Magnete ergibt sich aus den Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0 , \quad \operatorname{div} \mu_r \mathfrak{H} = 4\pi\varrho ,$$

wo für jeden Magneten $\sum m = \int \varrho\, dS = 0$ ist, genau so wie

1) Vgl. z. B. R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis, Leipzig 1905, S. 29.

sich ein elektrostatisches Feld aus den Formeln

$$\text{rot}\,\mathfrak{E} = 0\,, \quad \text{div}\,\varepsilon\mathfrak{E} = 4\pi\varrho_e$$

ergibt, wo $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke, ε die Dielektrizitätskonstante und ϱ_e die elektrische Dichte ist; in einem vollständigen Felde ist auch

$$\sum e = \int \varrho_e dS = 0\,.$$

Darnach ist der einzige Unterschied zwischen den magnetostatischen und elektrostatischen Feldern, daß bei elektrostatischen nur die Elektrizitätsmengen des vollständigen Feldes Null sind, dagegen bei magnetostatischen die Summen der Mengen auf jedem Magneten den Wert Null besitzen.

Die Diskussion über die Frage, ob es wahren Magnetismus gibt, ist ein Wortstreit. Diejenigen, welche behaupten, es gäbe wahren Magnetismus, betrachten die $\mu_r\mathfrak{H}$-Linien, welche Anfangs- und Endpunkte besitzen, diejenigen dagegen, welche dies bestreiten, ziehen die $\mathfrak{B}$-Linien in Rücksicht, welche keine Anfangs- und Endpunkte besitzen. Wir werden uns im folgenden der ersten Auffassungsweise in der Bezeichnung anschließen, die zugleich der historischen Entwicklung entspricht.

28. Das Feld spezieller permanenter Magnete. Der permanente vollkommene Kreis. Ein vollkommener Ring sei von einem geschlossenen Solenoid umgeben, in dem ein Strom fließt. Unterbricht man diesen, so bleibt eine remanente Induktion B_r übrig.

Da $\mathfrak{H}$ aus Symmetriegründen in Kreisen um die Ringachse verläuft und das Linienintegral wegen (3′) S. 6 Null sein muß, so ist $\mathfrak{H} = 0$, $\mathfrak{M}_w$ verlänft also in geschlossenen Bahnen.

Der permanente geschlitzte Kreis. Wie immer verlaufen auch die $\mathfrak{B}$-Linien eines geschlitzten Ringes in geschlossenen Bahnen, also ist

$$\mu_r\mathfrak{H}_i + 4\pi\mathfrak{M}_w = \mathfrak{H}_a\,;$$

ferner ist

$$\mathfrak{H}_i l_i + \mathfrak{H}_a l_a = 0\,.$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H}_a = \frac{4\pi\mathfrak{M}_w \frac{l_i}{\mu_r}}{\frac{l_i}{\mu_r} + l_a} \tag{87}$$

oder der Induktionsfluß

$$(87') \qquad \mathfrak{B}\sigma = \frac{4\pi \mathfrak{M}_w \frac{l_i}{\mu_r}}{\frac{l}{\mu_r \sigma} + \frac{l_a}{\sigma}} = \frac{M \cdot M \quad K}{w_i + w_a}.$$

(87′) hat genau die Form des Ohmschen Gesetzes, der Induktionsfluß berechnet sich aus der konstanten magnetomotorischen Kraft $4\pi \frac{\mathfrak{M}_w l_i}{\mu_r}$ und den inneren und äußeren magnetischen Widerständen des Kreises. Der Induktionsfluß variiert, wenn in einer Versuchsanordnung, die Fig. 32 entspricht, die Schlitzweiten verändert werden genau analog dem Verhalten eines geschlitzten elektromagnetischen Kreises (vgl. Nr. **18** (59′) S. 34).[1])

Liegt die Anordnung Fig. 32 vor, so bedeutet l_a natürlich in (87) resp. (87′) die Summe der Schlitzlängen.

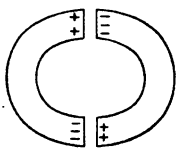

Fig. 32.

Da die $\mathfrak{M}$-Linien in Kreisen um die Ringachse laufen, aber nur im Innern des Magneten existieren, so befinden sich auf der einen Stirnfläche des einen Hufeisens ebensoviele Anfangswie auf der anderen Endpunkte. Die Stirnflächen sind also der Sitz der wahren magnetischen Mengen. Ist die wahre Magnetisierung durch ein einziges gleichmäßig gewickeltes Solenoid an beiden Hufeisen gleichzeitig hervorgerufen, so sind aus Symmetriegründen in beiden gleich viele $\mathfrak{M}$-Linien. Das sind die Voraussetzungen, unter denen die obige Formel abgeleitet ist; ferner ist auch von der Streuung in der Nähe der Schlitze abgesehen; (87) ist also nur in den Teilen des Schlitzes gültig, die von den Rändern eine gegen die Schlitzweite große Entfernung haben.

29. Ein permanent magnetisiertes Rotationsellipsoid. Erzeugt man in einem Rotationsellipsoid ein Feld in Richtung der Rotationsachse, so wird dieses, wie wir (Nr. **22**) sahen, gleichförmig ebenso wie die Induktion $\mathfrak{B}$; also wird auch die wahre

1) Daß die Induktion $\mathfrak{B}$ im Schlitze zweier einander gegenüberliegender Hufeisenmagnete (vgl. Fig. 32) bei Variation der Schlitzweiten nicht konstant bleibt, sondern sich nach Formel (87) verändert, ist experimentell gezeigt worden von R. H. Weber, Ann. Phys. **16**, 178, 1905; E. Kempken, Tübinger Diss. 1906 und Ann. Phys. **20**, 1017, 1906; P. Gehne, Diss. Halle 1908.

Magnetisierung $\mathfrak{M}_w$ gleichförmig sein. Im Innern des Magneten gilt

$$\mathfrak{H}_i = -P\mathfrak{M},$$

wo

$$4\pi\mathfrak{M} = \mathfrak{B} - \mathfrak{H}_i$$

ist. Ferner ist

$$\mathfrak{B} = \mu_r\mathfrak{H}_i + 4\pi\mathfrak{M}_w.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Größen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}_i$ eliminieren, und man erhält

$$\mathfrak{M}_w = \mathfrak{M}\{1 + \varkappa_r P\},$$

wo $\varkappa_r = \frac{\mu_r - 1}{4\pi}$ die reversible Suszeptibilität ist.

Da aber nach (80‴) Nr. **22** S. 48 das Zusatzfeld auf einem Punkte der verlängerten Achse sich ausrechnen läßt, und da dieses Zusatzfeld bei einem permanenten Magneten das gesamte Feld ist, so haben wir

$$\mathfrak{H}_a = \frac{2\mathfrak{M}_w V\left(1 + \frac{6}{5}\frac{A^2}{R^2} + \cdots\right)}{R^3\{1 + \varkappa_r P\}}. \tag{88}$$

Durch Messung von $\mathfrak{H}_a$ läßt sich also die wahre Magnetisierung bestimmen; man muß aber die (reversible) Permeabilität, wie wir sehen, auch kennen. Der Grund ist der, daß außer der wahren Magnetisierung auf jedem Magneten eine durch ihn selbst induzierte Magnetisierung vorhanden ist. Für sehr gestreckte Formen ist $P = 0$, also der $\{\ \}$-Ausdruck im Nenner von (88) gleich 1; dann ist die Fernwirkung von der Permeabilität unabhängig.

Die Größe

$$\frac{\mathfrak{M}_w}{1 + \varkappa_r P} = \mathfrak{M}_s$$

können wir mit Cohn[1]) als scheinbare Magnetisierung des permanenten Magneten bezeichnen; ihr ist das äußere Feld proportional.

30. Die Permeabilität permanent magnetisierter Magnete. Es ist für genaue Messungen von Wichtigkeit, die Permeabilität permanenter Magnete zu kennen, da hiervon die induzierte Magnetisierung abhängt, sobald der Magnet in einem fremden Felde, z. B. dem der Erde, liegt.

1) E. Cohn, Das elektromagn. Feld, Leipzig 1900, p. 214 ff.

Zu dem Zwecke bringe man das permanent magnetische Ellipsoid in eine Spule, in der man durch einen Strom i ein bekanntes gleichförmiges Feld $\mathfrak{H}_0$ erzeugen kann. Dann ist im Innern des Magneten

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - P\mathfrak{M},$$
$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M},$$
$$\mathfrak{B} = \mu_r\mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M}_w.$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{M}_w + \varkappa_r\mathfrak{H}_0}{1 + \varkappa_r P}. \tag{89}$$

Diese Größe ist für das äußere Feld des Magneten maßgebend, sie kann beträchtlich von $\mathfrak{M}_w$ abweichen. Während die wahre und die scheinbare Magnetisierung bei Bewegungen der Magnete gegeneinander in Strenge konstant sind, ist die freie Magnetisierung $\mathfrak{M}$ davon abhängig, in welchem äußeren Felde $\mathfrak{H}_0$ sich der Magnet befindet.

Da $\mathfrak{M}_w$ konstant ist, so ist bei einer kleinen Änderung von $\mathfrak{H}_0$ nach (89)

$$\frac{d\mathfrak{M}}{d\mathfrak{H}_0} = \frac{\varkappa_r}{1 + \varkappa_r P}. \tag{90}$$

Diese Größe läßt sich aber bestimmen durch Beobachtung der Änderung der Magnetisierung beim Einschalten eines Stromes in die Spule (die Wirkung der Spule allein muß natürlich kompensiert sein (vgl. Nr. **25**, S. 55, Fig. 27)) oder durch Induktionsmessung, indem man die Zunahme des Induktionsflusses bestimmt, die im Magneten durch Einschalten eines Stromes in die Spule auftritt. Zu dem Zwecke muß um die Mitte des Magneten eine Sekundärspule gelegt sein, die mit einem ballistischen Galvanometer verbunden ist.[1])

31. Der Stabmagnet. Magnetpole. Ein gegen seine Querdimensionen langer Stab, der symmetrisch um seine Längsachse und gegen eine Ebene senkrecht zur Längsachse ist, werde dadurch permanent magnetisiert, daß er in ein seiner Achse paralleles gleichförmiges Feld gebracht wird.

Dann wird die freie Dichte bis aufs Vorzeichen gleich sein in Punkten, die zu verschiedenen Seiten der Mittelebene liegen, aber von derselben gleichen Abstand haben.

1) Vgl. S. 60 Fußnote 3.

Das Potential berechnet sich nach der Formel (86)

$$U = \int \frac{\varrho_0}{r} dS,$$

und es ist

$$\varrho_0(+x) = -\varrho_0(-x),$$

wenn die x-Achse in der Längsachse des Magneten liegt und ihren Anfangspunkt im Mittelpunkt desselben hat. Wegen der geometrischen Symmetrie ist der Querschnitt

$$\sigma(+x) = \sigma(-x).$$

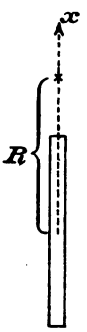

Fig. 33.

Nennen wir den Abstand des Punktes, in dem das Potential berechnet werden soll, vom Nullpunkte R, so ist für einen Punkt auf der verlängerten Längsachse, d. h. einem Punkte in erster Hauptlage zum Magneten (vgl. Fig. 33),

$$U = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\varrho_0 \sigma \, dx}{(R-x)}.$$

Da $x < R$ ist, so darf man entwickeln

$$U = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\varrho_0 \sigma}{R}\left(1 + \frac{x}{R} + \frac{x^2}{R^2} + \cdots\right) dx.$$

Wegen der Symmetrieeigenschaften verschwindet der erste, dritte, fünfte, . . . Term, und man erhält

$$U = \frac{M_1}{R^2} + \frac{M_3}{R^4} + \cdots,$$

wo $M_1 = \sum m_0 x$, $M_3 = \sum m_0 x^3$, . . . gegebene Größen des Magneten sind. m_0 ist die freie Masse an einer bestimmten Stelle. M_1 heißt das Moment des Magneten.

Aus U folgt das Feld $\mathfrak{H}_1$ in einem Punkte in erster Hauptlage

$$\mathfrak{H}_1 = -\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{2M_1}{R^3} + \frac{4M_3}{R^5} + \cdots$$

In einem Punkte, dessen Abstand x_0 von der Mittelebene unendlich klein gegen R ist, und für den $R > \frac{l}{2}$ ist, ist das Potential (vgl. Fig. 34)

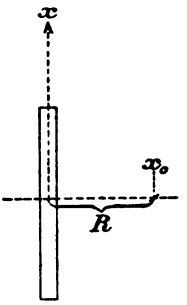

Fig. 34.

$$U = \int \frac{\varrho_0 \sigma \, dx}{\sqrt{R^2 + (x - x_0)^2}} = \int \frac{\varrho_0 \sigma \, dx}{R\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2} - \frac{2 x x_0}{R^2}}}.$$

In dem letzten Ausdruck ist das Glied mit x_0^2 bereits fortgelassen.

Das Feld steht aus Symmetriegründen senkrecht zur Mittelebene. Man erhält das Feld in einem Punkte der Mittelebene, einem sogenannten Punkte in zweiter Hauptlage zum Magneten, indem man U nach x_0 differentiert und dann $x_0 = 0$ setzt. So ergibt sich

$$\mathfrak{H}_2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x_0}\right)_{x_0 = 0} = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\varrho_0 \sigma x \, dx}{R^3} \left(1 - \frac{3}{2}\frac{x^2}{R^2} + \frac{15}{8}\frac{x^4}{R^4} - \cdots\right)$$

oder

$$\mathfrak{H}_2 = \frac{M_1}{R^3} - \frac{3}{2}\frac{M_3}{R^5} + \frac{15}{8}\frac{M_5}{R^7} - \cdots.$$

Aus den Werten für $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ mit Berücksichtigung der Bedeutung von $M_1, M_3, \ldots$ lassen sich speziell die Felder ableiten, welche durch zwei punktförmige Magnetismusmengen $\pm m$ im Abstande $\pm \frac{L}{2}$ von der Mittelebene erzeugt werden. Für diese ist nämlich

$$\mathfrak{H}_1' = 2\frac{mL}{R^3} + \frac{mL^3}{R^5} + \cdots$$

$$\mathfrak{H}_2' = \frac{mL}{R^3} - \frac{3}{8}\frac{mL^3}{R^5} + \cdots$$

In erster Annäherung hat das Polpaar dieselbe Wirkung wie der wirkliche Magnet, wenn

$$2m\frac{L}{2} = mL = M_1$$

ist, dann sind also Polstärke m und Polabstand L des äquivalenten Polpaares nicht bestimmt, sondern nur ihr Produkt; in zweiter Annäherung muß

$$mL = M_1; \qquad 2m\left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{mL^3}{4} = M_3$$

sein, woraus sich m und L einzeln berechnen. In noch größerer Annäherung läßt sich der Magnet nicht durch ein Polpaar ersetzen.[1])

Kapitel IV.

Magnetische Energie und Kräfte.

32. Das Energieprinzip. Wir hatten als Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes gefunden

$$\text{(4')} \qquad \text{rot } \mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{J},$$

$$\text{(14')} \qquad -\text{rot } \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}.$$

Allerdings gilt (4') nur, wenn sich die elektrischen Feldstärken nicht zu schnell verändern, da sonst zum Leitungsstrom noch ein sogenannter Verschiebungsstrom in dielektrischen Körpern hinzukäme. Dann würde anstatt (4') gelten

$$\text{(4'')} \qquad \text{rot } \mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{J} + \varepsilon\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t},$$

wenn ε die Dielektrizitätskonstante bedeutet.

Schreiben wir (4'') und (14') in rechtwinkligen Koordinaten und multiplizieren die erste Gleichung (4'') mit $\mathfrak{E}_x$, die zweite und dritte mit $\mathfrak{E}_y$ resp. $\mathfrak{E}_z$, die erste Gleichung (14') mit $\mathfrak{H}_x$, die zweite und dritte mit $\mathfrak{H}_y$ resp. $\mathfrak{H}_z$, und addieren alle sechs, so erhalten wir nach einiger Umformung der linken Seite

$$\text{(91)} \quad \left\{ \begin{aligned} &-\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_x - \mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_x)\right\} = \\ &4\pi(\mathfrak{J}_x\mathfrak{E}_x + \mathfrak{J}_y\mathfrak{E}_y + \mathfrak{J}_z\mathfrak{E}_z) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\varepsilon}{2}\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}_x\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial t} + \mathfrak{H}_y\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial t} + \mathfrak{H}_z\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial t} \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. E. Riecke, Ann. Phys. Chem. (2) **149**, 1873, p. 62 und ibid. (3) **8**, 1879, p. 299.

oder nach Division durch 4π und Einführung des Vektors $\mathfrak{S}$ durch die Gleichungen

$$(92)\qquad \begin{cases} \mathfrak{S}_x = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_y) \\ \mathfrak{S}_y = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_x - \mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_z) \\ \mathfrak{S}_z = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_x), \end{cases}$$

$$-\operatorname{div}\mathfrak{S} = (\mathfrak{J}_x\mathfrak{E}_x + \mathfrak{J}_y\mathfrak{E}_y + \mathfrak{J}_z\mathfrak{E}_z) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2 + \frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{H}_x\frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial t} + \mathfrak{H}_y\frac{\partial\mathfrak{B}_y}{\partial t} + \mathfrak{H}_z\frac{\partial\mathfrak{B}_z}{\partial t}\right).$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit dS und integrieren über einen beliebigen Raum S mit der Oberfläche σ, so erhalten wir, wenn wir links den Gaußschen Integralsatz anwenden (vgl. Nr. 27 S. 62),

$$(93)\qquad -\int \mathfrak{S}_n d\sigma = \int \mathfrak{J}\mathfrak{E}\,dS + \frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2\,dS + \frac{1}{4\pi}\int\mathfrak{H}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}dS.$$

Hier haben wir von der in der Vektoranalysis üblichen Bezeichnungsweise des skalaren Produkts

$$\mathfrak{J}_x\mathfrak{E}_x + \mathfrak{J}_y\mathfrak{E}_y + \mathfrak{J}_z\mathfrak{E}_z = |\mathfrak{J}|\cdot|\mathfrak{E}|\cos(\mathfrak{E},\mathfrak{J}) = \mathfrak{J}\mathfrak{E}.$$

Gebrauch gemacht.

In einem homogenen Leiter ist

$$(10)\qquad \mathfrak{J} = \lambda\mathfrak{E},$$

wo λ die elektrische Leitfähigkeit bedeutet. Nennen wir den Querschnitt eines linearen Leiters σ, sein Längenelement ds, so ist das erste Integral rechts

$$\sum\int \mathfrak{J}_z\mathfrak{E}_z\,\sigma\,ds = \sum\int\frac{\mathfrak{J}^2}{\lambda}\sigma\,ds = \sum i^2\int\frac{ds}{\lambda\sigma} = \sum i^2 w,$$

wenn $i = |\mathfrak{J}|\sigma$ die Stromstärke und w den Widerstand bedeutet und das Summenzeichen sich auf alle Stromkreise bezieht.

i darf vor das Integralzeichen gesetzt werden, da i von s unabhängig ist.

$\sum i^2 w$ ist aber die in der Zeiteinheit in den Leitern entwickelte Joulesche Wärme.

Ist der Leiter nicht homogen, so ist

$$\mathfrak{J} = \lambda(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_i),$$

wo $\mathfrak{E}_i$ die eingeprägte elektromotorische Intensität heißt. In diesem Falle ist

$$\int \mathfrak{J}\mathfrak{E}\,dS = \int \frac{\mathfrak{J}^2}{\lambda}\,dS + \int \mathfrak{J}\mathfrak{E}_i\,ds = \sum i^2 w + \sum \int \mathfrak{J}_i \sigma \cdot \mathfrak{E}_{i_s} ds$$
$$= \sum i^2 w - \sum i E_i,$$

wenn

$$E_i = -\int \mathfrak{E}_{i_s}\,ds$$

die gesamte elektromotorische Kraft des Stromkreises bedeutet.

$\int \mathfrak{J}\mathfrak{E}\,ds$ ist also der Überschuß der in einem Leiter in der Zeiteinheit entwickelten Jouleschen Wärme über die von den Elementen gelieferte chemisch-thermische Energie. Der zweite Term der rechten Seite ist umkehrbare Energieumsetzung, da er mit der Richtung von i sein Zeichen wechselt.

Wählen wir als Raum den unendlichen Raum, und seien die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ an den Grenzen des Raumes unendlich klein, und zwar so, daß $\int \mathfrak{S}_n\,d\sigma$ keinen endlichen Betrag hat, so ist nach (93)

$$(94) \quad \sum E_i i = \sum i^2 w + \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2\,dS + \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\,dS.$$

In dem einfachen Falle, in dem $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ durch den augenblicklichen Wert von $\mathfrak{H}$ gegeben ist und μ konstant ist, wo also keine Hysteresis existiert, dürfen wir schreiben

$$(95) \quad \sum E_i i = \sum i^2 w + \frac{dW}{dt},$$

wo

$$W = W_e + W_m$$

und

$$(96) \quad W_e = \int \frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2\,dS \quad \text{und} \quad W_m = \int \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2\,dS$$

bedeutet.

W muß also irgendeine Energieform sein, denn die Joulesche Wärme und die Zunahme dieser Energieform zusammen sind das Äquivalent der von den Elementen geleisteten Energie.

Wir nennen W die elektromagnetische Energie, da sie von dem Vorhandensein eines elektrischen resp. magnetischen Feldes abhängig und durch dessen Größe eindeutig gegeben ist.

W_e heißt die elektrische, W_m die magnetische Energie.

Ist der Raum nicht unendlich groß, so daß im allgemeinen $\mathfrak{S}$ endliche Werte auf seiner Oberfläche hat, so ist

$$(95') \qquad \sum E_i i = \sum i^2 w + \frac{dW}{dt} + \int \mathfrak{S}_n \, d\sigma .$$

Das Energieprinzip ist noch immer erhalten, wenn wir $\int \mathfrak{S}_n \, d\sigma$ als die durch die Oberfläche aus dem Raume in der Zeiteinheit herausströmende Energie, als Strahlung durch die Oberfläche, bezeichnen.

$\mathfrak{S}$ heißt der Poyntingsche Strahlungsvektor.

Ist $\mathfrak{B}$ keine eindeutige Funktion von $\mathfrak{H}$, wie bei den ferromagnetischen Körpern, so kann man nicht mehr von magnetischer Energie reden. Läßt man das Ferromagnetikum einen Kreisprozeß durchlaufen, d. h. einen Zyklus von $\mathfrak{H}\,\mathfrak{B}$-Werten, so daß man schließlich im selben Punkte der $\mathfrak{H}\mathfrak{B}$-Ebene wieder anlangt, von dem man ausgegangen ist, so gilt im unendlichen Raume nach (95)

$$\int dt \sum (E_i i - i^2 w) = \frac{1}{4\pi} \int dS \int \mathfrak{H} \frac{d\mathfrak{B}}{dt} \, dt .$$

Es muß also $\frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{H} \, d\mathfrak{B}$ die in der Volumeinheit beim Durchlaufen des Zyklus auftretende Hysteresiswärme sein.[1])

Es ist

$$\int \mathfrak{H} \, d\mathfrak{B} = - \int \mathfrak{B} \, d\mathfrak{H} ,$$

denn durch partielle Integration ergibt sich

$$\mathfrak{H} \, d\mathfrak{B} = d(\mathfrak{H}\mathfrak{B}) - \mathfrak{B} \, d\mathfrak{H} ,$$

und das Integral über ein vollständiges Differential verschwindet bei einem vollständigen Zyklus.

$-\int \mathfrak{B} \, d\mathfrak{H}$ ist immer positiv, da der $\mathfrak{B}$-Wert bei abnehmendem $\mathfrak{H}$ immer größer ist als bei demselben wachsenden $\mathfrak{H}$ (vgl. Fig. 35).

1) Dieses Gesetz wurde von E. Warburg, Ann. Phys. Chem. (3) **13**, 1881, p. 141 entdeckt.

$\int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{B}$ ist der von der Hysteresiskurve umspannte Flächenraum, $\frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{B}$ ist die sogenannte magnetische Energievergeudung, da für den Techniker die Hysteresiswärme praktisch nicht brauchbar ist und insofern einen Verlust an nutzbarer Energie bedeutet.

Bemerkung: Für kleine reversible Änderungen von $\mathfrak{H}$ ist bei ferromagnetischen Körpern $\mathfrak{B} = \mu_r \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{M}_w$, wo $\mathfrak{M}_w$ konstant ist, also $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \mu_r \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$, und somit

$$\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mu_r}{8\pi}\mathfrak{H}^2;$$

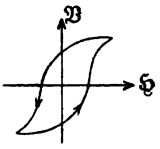

Fig. 35.

wir können also in dem Gültigkeitsbereich der Formel für $\mathfrak{B}$, d. h. für kleine reversible Änderungen die für die Volumeinheit berechnete magnetische Energie durch den Ausdruck $w = \frac{\mu_r}{8\pi}\mathfrak{H}^2 + w_0$ darstellen, wo w_0 eine uns unbekannte Funktion von x, y, z ist, die auch noch von dem Parameter $\mathfrak{M}_w$ abhängen kann. Dann bleibt w_0 in ruhender Materie bei reversiblen zeitlichen Änderungen konstant. Die Energie ist also in diesem Falle

$$W = \int \frac{\mu_r}{8\pi}\mathfrak{H}^2 dS + \int w_0\, dS.$$

33. Die Arbeit der magnetischen Kräfte. Aus dem Energieprinzip folgt, wenn wir annehmen, daß die Kräfte elektrischen Ursprungs den Änderungen der momentan vorhandenen elektrischen Energie entsprechen,

$$\sum(E_i i - i^2 w) - \frac{dW_m}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t}, \tag{97}$$

wo A die Arbeit der magnetischen Kräfte bedeutet.

Die zweite Maxwellsche Gleichung ergibt unter Berücksichtigung der Beziehung $iw - E_i = \int\left(\frac{\mathfrak{I}_s}{\lambda} + \mathfrak{E}_{is}\right) ds = \int \mathfrak{E}_s\, ds$

$$\sum(E_i i - i^2 w) = -\sum i \int \mathfrak{E}_s\, ds = \sum i \frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}_n\, d\sigma = \sum i \frac{dQ}{dt}. \tag{98}$$

Hier bedeutet Q den Induktionsfluß durch die Stromkurve. Also ist

(99) $$\sum i \frac{dQ}{dt} - \frac{dW_m}{dt} = \frac{\partial A}{dt}$$

oder

(100) $$\sum i\,\delta Q - \delta W_m = \partial A,$$

für eine beliebige virtuelle Verschiebung der ponderablen Körperelemente.

Unter ∂A verstehen wir

(101) $$\partial A = \int \mathfrak{f}\,\delta\mathfrak{s}\,dS = \int (\mathfrak{f}_x\,\delta\mathfrak{s}_x + \mathfrak{f}_y\,\delta\mathfrak{s}_y + \mathfrak{f}_z\,\delta\mathfrak{s}_z)\,dS,$$

wenn $\mathfrak{f}$ die auf die Volumeinheit wirkende Kraft, $\delta\mathfrak{s}$ eine virtuelle Verschiebung des Volumelements mit den Komponenten $\delta\mathfrak{s}_x$, $\delta\mathfrak{s}_y$, $\delta\mathfrak{s}_z$ bedeutet.

34. Die Kräfte im magnetostatischen Felde. Im magnetostatischen Felde ist $i = 0$, also folgt aus (100) und (101)

(102) $$-\delta W_m = \int (f\,\delta\mathfrak{s})\,dS.$$

Die Abnahme der magnetischen Energie eines magnetostatischen Feldes bei einer virtuellen Verschiebung ist gleich der von den magnetischen Kräften geleisteten virtuellen Arbeit, wie es auch von vornherein zu erwarten war, da keine anderen Energieumsetzungen stattfinden.

Da

$$W_m = \frac{1}{8\pi}\int \mu\mathfrak{H}^2\,dS$$

ist, so wird die Änderung der Energie bei einer virtuellen Verschiebung

(103) $$\delta W_m = \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{H}^2\,\delta\mu\,dS + \frac{1}{4\pi}\int \mu\mathfrak{H}\,\delta\mathfrak{H}\,dS.$$

Die Variationen von μ und $\mathfrak{H}$ an einer Stelle des Raumes sind nicht unabhängig voneinander, da dauernd

(104) $$\frac{\partial \mu\mathfrak{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu\mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mu\mathfrak{H}_z}{\partial z} - 4\pi\varrho = 0$$

gilt (vgl. S. 62 unten), oder

(104′) $$\frac{\partial}{\partial x}\delta(\mu\mathfrak{H}_x) + \frac{\partial}{\partial y}\delta(\mu\mathfrak{H}_y) + \frac{\partial}{\partial z}\delta(\mu\mathfrak{H}_z) - 4\pi\,\delta\varrho = 0.$$

(104′) multiplizieren wir mit einem beliebigen unbestimmten Faktor γ, der eine Funktion des Orts sein kann, und mit dS und

integrieren über den ganzen Raum. Addiert man die so erhaltene Gleichung zu (103), so bekommt man

$$(105)\quad \begin{cases} \delta W_m = \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{H}^2\,\delta\mu\,dS + \frac{1}{4\pi}\int \mu\mathfrak{H}\,\delta\mathfrak{H}\,dS \\ + \int \gamma\left(\frac{\partial\,\delta(\mu\mathfrak{H}_x)}{\partial x} + \cdots\right) dS - \int 4\pi\gamma\,\delta\varrho\,dS. \end{cases}$$

Im dritten Integral rechts wende man partielle Integration an und berücksichtige, daß $\mathfrak{H}$ auf der Oberfläche des Raumes (im Unendlichen) Null ist, dann erhält man mit Benutzung der Formel $\delta(\mu\mathfrak{H}_x) = \mathfrak{H}_x\,\delta\mu + \mu\,\delta\mathfrak{H}_x$

$$(105')\quad \begin{cases} \delta W_m = \int\left[\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2 - \left(\mathfrak{H}_x\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \cdots\right)\right]\delta\mu\,dS \\ + \int\left\{\left(\frac{\mu\mathfrak{H}_x}{4\pi} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\mu\right)\delta\mathfrak{H}_x + \cdots\right\} dS - \int 4\pi\gamma\,\delta\varrho\,dS. \end{cases}$$

Wir dürfen über γ ganz willkürlich verfügen; wir tun es so, daß die Faktoren von $\delta\mathfrak{H}_x, \delta\mathfrak{H}_y, \delta\mathfrak{H}_z$ verschwinden, d. h. wir setzen

$$\mathfrak{H}_x = 4\pi\frac{\partial\gamma}{\partial x}, \quad \mathfrak{H}_y = 4\pi\frac{\partial\gamma}{\partial y}, \quad \mathfrak{H}_z = 4\pi\frac{\partial\gamma}{\partial z}.$$

Das ist möglich, da $\mathfrak{H}$ im magnetostatischen Felde sich aus einem Potential ableitet.

Dann wird aber

$$(106)\qquad \delta W_m = -\int\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2\,\delta\mu\,dS - \int 4\pi\gamma\,\delta\varrho\,dS.$$

Nun bedeutet $\delta\mu$ die Änderung von μ an einem bestimmten Orte durch eine virtuelle Verschiebung der Materie. Wir wollen von den Erscheinungen der sogenannten Magnetostriktion im engeren Sinne des Wortes absehen, welche daher rührt, daß μ durch Deformationen der Materie sich verändert, dann wird nach der Verschiebung im Punkte xyz derjenige μ-Wert sein, der vorher im Punkte $x - \delta\mathfrak{x}_x$, $y - \delta\mathfrak{x}_y$, $z - \delta\mathfrak{x}_z$ bestand, d. h. es ist

$$(107)\qquad \delta\mu = -\frac{\partial\mu}{\partial x}\delta\mathfrak{x}_x - \frac{\partial\mu}{\partial y}\delta\mathfrak{x}_y - \frac{\partial\mu}{\partial z}\delta\mathfrak{x}_z.$$

Ferner haftet ϱ an der Materie. Verschieben wir die Körperteilchen, so tritt durch die linke Seitenfläche eines im Raume festliegenden Parallelepipeds mit den Kanten $dx\,dy\,dz$ die Menge

$\varrho\,\delta\mathfrak{s}_x\,dy\,dz$, während auf der gegenüberliegenden rechten Seite $(\varrho\,\delta\mathfrak{s}_x)_{x+dx}\,dy\,dz$ herausgeschoben wird. Entsprechend sind die Beträge der anderen Seitenflächen. Entwicklung nach dem Taylorschen Satze ergibt für die Menge, welche infolge der Verschiebung in das Parallelepiped eintritt, die also mit $\delta\varrho\,dx\,dy\,dz$ zu bezeichnen ist,

$$\delta\varrho\,dx\,dy\,dz = -\left(\frac{\partial\varrho\,\delta\mathfrak{s}_x}{\partial x} + \frac{\partial\varrho\,\delta\mathfrak{s}_y}{\partial y} + \frac{\partial\varrho\,\delta\mathfrak{s}_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz. \tag{108}$$

Setzt man den aus (108) folgenden Wert für $\delta\varrho$ in (106) ein und integriert partiell, so erhält man, wenn man berücksichtigt, daß im Unendlichen $\varrho = 0$ ist, und wenn man die Werte für $\frac{\partial\gamma}{\partial x}, \frac{\partial\gamma}{\partial y}, \frac{\partial\gamma}{\partial z}$ benutzt,

$$\delta W_m = -\int(\mathfrak{f}_x\,\delta\mathfrak{s}_x + \cdots)\,dS \tag{109}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int\left(\mathfrak{H}^2\frac{\partial\mu}{\partial x}\,\delta\mathfrak{s}_x + \cdots\right)dS - \int(\mathfrak{H}_x\,\varrho\,\delta\mathfrak{s}_x + \cdots)\,dS.$$

Da die virtuellen Verschiebungskomponenten ganz willkürlich sind, so müssen die Faktoren von $\delta\mathfrak{s}_x$, $\delta\mathfrak{s}_y$, $\delta\mathfrak{s}_z$ links und rechts einander gleich sein, d. h. die Komponenten der Kraft auf die Volumeinheit lauten

$$\begin{cases} \mathfrak{f}_x = \varrho\mathfrak{H}_x - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2\frac{\partial\mu}{\partial x} \\ \mathfrak{f}_y = \varrho\mathfrak{H}_y - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2\frac{\partial\mu}{\partial y} \\ \mathfrak{f}_z = \varrho\mathfrak{H}_z - \frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2\frac{\partial\mu}{\partial z}. \end{cases} \tag{110}$$

Der erste Teil der Kraft hat die Richtung der magnetischen Feldstärke, er hat das Bestreben, eine positive (negative) Menge in Richtung (entgegen der Richtung) des magnetischen Feldes zu treiben.

Der zweite Teil hat die Richtung des stärksten Gefälles von μ, er existiert also nur an Stellen, an denen die Permeabilität räumlich variiert.

Die Gesamtkraft $\mathfrak{F}_x = \int\mathfrak{f}_x dS$ gibt Aufschluß über die Translationsbewegungen eines starren Körpers, wenn das Integral über den fraglichen Körper erstreckt wird. Nach (110) ist

$$(111) \qquad \mathfrak{F}_x = \int \varrho \mathfrak{H}_x dS - \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{H}^2 \frac{\partial(\mu-1)}{\partial x} dS,$$

denn es ist $\frac{\partial(\mu-1)}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x}$.

Auf das zweite Integral wenden wir partielle Integration an und berücksichtigen, daß auf der Oberfläche des Körpers, wo dieser an die Luft grenzt, die Permeabilität $\mu = 1$ ist, also der Integrand Null wird; dann ist

$$(112) \qquad \mathfrak{F}_x = \int \varrho \mathfrak{H}_x dS$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \mathfrak{H}_x (\mu-1) \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \mathfrak{H}_y (\mu-1) \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} + \mathfrak{H}_z (\mu-1) \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} \right\} dS.$$

Da im magnetostatischen Felde rot $\mathfrak{H} = 0$ ist, so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}; \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z}.$$

Setzt man diese Werte in (112) ein und integriert im zweiten Integral partiell, so erhält man

$$(113) \quad \mathfrak{F}_x = \int \varrho \mathfrak{H}_x dS - \int \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial(\mu-1)\mathfrak{H}_x}{\partial x} + \cdots \right) \mathfrak{H}_x dS.$$

Nun hatten wir aber $-\frac{1}{4\pi} \operatorname{div}(\mu-1)\mathfrak{H}$ in Nr. 27 S. 60 als Dichte des induzierten Magnetismus bezeichnet und hatten die Summe des wahren und induzierten Magnetismus freien Magnetismus genannt. Seine Dichte bezeichneten wir mit ϱ_0. Also ist

$$(114) \qquad \mathfrak{F}_x = \int \varrho_0 \mathfrak{H}_x dS.$$

Bei translatorischen Bewegungen starrer Körper kann man also $\mathfrak{f}_0 = \varrho_0 \mathfrak{H}$ als Kraft auf die Volumeinheit bezeichnen.

Es läßt sich zeigen, daß auch für Drehmomente auf starre Körper diese Kraft $\mathfrak{f} = \varrho_0 \mathfrak{H}$ in Rechnung zu ziehen ist, indem man nachweist, daß das Drehmoment mit der x-Komponente

$$\mathfrak{N}_x = \int \left[\left(\varrho \mathfrak{H}_z - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 \frac{\partial(\mu-1)}{\partial z} \right) y - \left(\varrho \mathfrak{H}_y - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 \frac{\partial(\mu-1)}{\partial y} \right) z \right] dS$$

sich auf die Form

$$(114') \qquad \mathfrak{N}_x = \int \varrho_0 (\mathfrak{H}_z y - \mathfrak{H}_y z)\, dS$$

bringen läßt. Wir übergehen den Beweis, der ganz analog dem obigen ist.

Auf S. 74 hatten wir stillschweigend im magnetostatischen Felde als Energie $W = \frac{1}{8\pi}\int \mu \mathfrak{H}^2 dS$ angenommen; bei ferromagnetischen Körpern — und es sind alle Materialien ferromagnetisch, die wahre magnetische Mengen besitzen — lautet aber für reversible Änderungen der Energieausdruck

$$W = \int \frac{\mu_r}{8\pi} \mathfrak{H}^2 dS + \int w_0(xyz) dS$$

(vgl. den Schluß von Nr. 32).

Betrachten wir nur die Gesamtkraft auf die als starr angesehenen ferromagnetischen Körper, d. h. verzichten wir auf die Darstellung der Deformationen, die infolge der magnetischen Kräfte im Eisen oder Stahl hervorgerufen werden, so können wir für die Änderung der Energie bei einer virtuellen Verschiebung schreiben

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta \int \frac{\mu_r}{8\pi} \mathfrak{H}^2 dS + \int \delta w_0 \, dS \\ &= \delta \int \frac{\mu_r}{8\pi} \mathfrak{H}^2 dS - \int \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \delta \mathfrak{s}_x + \cdots \right) dS, \end{aligned}$$

denn w_0 haftet an der Materie, so daß nach der Verschiebung am Orte xyz die Werte gelten werden, die vor der Verschiebung der Stelle $x - \delta \mathfrak{s}_x$, $y - \delta \mathfrak{s}_y$, $z - \delta \mathfrak{s}_z$ zukamen.

Ein starrer Körper kann nun eine Parallelverschiebung mit den Komponenten $\overline{\delta \mathfrak{s}_x}$, $\overline{\delta \mathfrak{s}_y}$, $\overline{\delta \mathfrak{s}_z}$ und eine Drehung um die Koordinatenachsen um die Winkel $\delta \vartheta_x$, $\delta \vartheta_y$, $\delta \vartheta_z$ erleiden, so daß nach bekannten kinematischen Formeln

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{s}_x &= \overline{\delta \mathfrak{s}_x} + z \delta \vartheta_y - y \delta \vartheta_z \\ \delta \mathfrak{s}_y &= \overline{\delta \mathfrak{s}_y} + x \delta \vartheta_z - z \delta \vartheta_x \\ \delta \mathfrak{s}_z &= \overline{\delta \mathfrak{s}_z} + y \delta \vartheta_x - x \delta \vartheta_y \end{aligned}$$

ist. Mit Hilfe dieser Beziehungen wird

$$\begin{aligned} \delta W = \delta \int \frac{\mu_r}{8\pi} \mathfrak{H}^2 dS &- \overline{\delta \mathfrak{s}_x} \int \frac{\partial w_0}{\partial x} dS - \delta \vartheta_x \int \left(y \frac{\partial w_0}{\partial z} - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) dS \\ &- \delta \mathfrak{s}_y \int \frac{\partial w_0}{\partial y} dS - \delta \vartheta_y \int \left(z \frac{\partial w_0}{\partial x} - x \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) dS \\ &- \overline{\delta \mathfrak{s}_z} \int \frac{\partial w_0}{\partial z} dS - \delta \vartheta_z \int \left(x \frac{\partial w_0}{\partial y} - y \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) dS. \end{aligned}$$

Da nun w_0 außerhalb des ferromagnetischen Körpers Null ist, so ergibt die Ausführung der Integration

$$\int \frac{\partial w_0}{\partial x} dS = \iiint \frac{\partial w_0}{\partial x} dx\, dy\, dz = \int w_0 \cos(nx)\, d\sigma = 0,$$

weil σ eine Fläche ist, die den Eisenkörper unmittelbar umgibt. Ebenso ist es mit den anderen Termen auch, die w_0 enthalten.

Es bleibt also

$$\delta W = \delta \int \frac{\mu_r}{8\pi} \mathfrak{H}^2 dS,$$

d. h. die Kräfte auf starre Körper berechnen sich aus dem Energieausdruck $W = \int \frac{\mu_r}{8\pi} \mathfrak{H}^2 dS$ richtig, es gelten also auch insbesondere im magnetostatischen Felde die Formeln (114) und (114′) für die Kräfte und Drehmomente.

Die Darstellung der Kraft $\mathfrak{f}_0$ durch die freien Ladungen hat den Nachteil, daß sie nur die Kräfte auf starre Körper richtig gibt, aber nicht die Deformationen der Körper infolge der magnetischen Kräfte, ferner daß die freien Ladungen nicht an der Materie haften, sondern erst bestimmt sind, wenn man das Feld kennt, sie hat aber den Vorteil, daß die Permeabilität äußerlich überhaupt nicht mehr vorkommt, daß das Feld $\mathfrak{H}$ sich einfach aus den freien Ladungen berechnen läßt (vgl. Nr. 27 (86)), daß die Kräfte sich in sehr einfacher Form darstellen, und daß bei vielen wichtigen Meßmethoden die freien Mengen mit großer Annäherung konstant sind.

Drückt man die Kraft durch die freien Mengen aus, so erhält man das Coulombsche Gesetz; denn wenn das Feld $\mathfrak{H}$ durch eine freie punktförmige Menge $m_0(xyz)$ erzeugt wird, die von der Menge $m_0 = \varrho_0' dS$ den Abstand r hat, so ist das Potential der Menge m_0' an der Stelle von $m_0'(x'y'z')$ $U = \frac{m_0}{r}$ (vgl. Nr. 27 (86)), also $\mathfrak{H}_x = -\frac{\partial U}{\partial x'} = \frac{m_0}{r^2} \frac{x' - x}{r}$.

Bei der Berechnung von $\mathfrak{H}$ ist die Feldstärke, welche von m_0' selbst hervorgerufen wird, unberücksichtigt geblieben, es läßt sich aber streng zeigen, daß dieser Teil der Feldstärke keinen Beitrag zur Kraft auf m_0' liefert. Nach (114) folgt

$$\mathfrak{F}_x = \frac{m_0 m_0'}{r^2} \frac{x' - x}{r}. \tag{115}$$

(115) bedeutet aber, daß die Kraft in die Richtung der Verbindungslinie r fällt, den freien Mengen direkt und dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist (Coulomb).[1])

Auf einen permanenten Magneten in einem *gleichförmigen* Felde wird keine translatorische Kraft ausgeübt, denn es ist

$$\mathfrak{F}_x = \int \varrho_0 \mathfrak{H}_x \, dS = \mathfrak{H}_x \int \varrho_0 \, dS = \mathfrak{H}_x \sum m_0 .$$

Nun ist $\sum m = 0$, wie wir in Nr. 27 gesehen haben; es läßt sich aber auch zeigen, daß die Summe der induzierten Mengen Null ist.

Die induzierte Dichte ist

$$-\operatorname{div} \varkappa_r \mathfrak{H} = \varrho' , \qquad \text{(vgl. Nr. 27 S. 60)}$$

also ist die gesamte induzierte Menge

$$\sum m' = -\int \operatorname{div} \varkappa_r \mathfrak{H} \, dS = -\int \varkappa_r \mathfrak{H}_n \, d\sigma ,$$

und zwar ist das Oberflächenintegral auf einer Fläche zu bilden, die den Körper unmittelbar umgibt, hier ist es aber Null, da hier bereits $\varkappa_r = 0$ ist; also ist $\sum m' = 0$, d. h. $\sum m_0 = \sum m + \sum m' = 0$, woraus $\mathfrak{F}_x = 0$ folgt.

Dagegen wirkt auf einen Magneten im homogenen Felde ein Drehmoment, dessen z-Komponente folgendermaßen lautet

$$(116) \qquad \mathfrak{N}_z = \int \varrho_0 (x \mathfrak{H}_y - y \mathfrak{H}_x) \, dS = \mathfrak{H}_y \sum m_0 x - \mathfrak{H}_x \sum m_0 y ,$$

ebenso

$$(116) \qquad \begin{cases} \mathfrak{N}_x = \mathfrak{H}_z \sum m_0 y - \mathfrak{H}_y \sum m_0 z \\ \mathfrak{N}_y = \mathfrak{H}_x \sum m_0 z - \mathfrak{H}_z \sum m_0 x . \end{cases}$$

Nennen wir

$$M_{1x} = \sum m_0 x , \qquad M_{1y} = \sum m_0 y , \qquad M_{1z} = \sum m_0 z$$

die Komponenten des freien Moments, so ist der Vektor, welcher das freie Moment darstellt, vom Koordinatenanfangspunkt unabhängig, denn

$$\sum m_0 (x + a) = \sum m_0 x + a \sum m_0 = \sum m_0 x ,$$

da $\sum m_0 = 0$ ist.

1) Coulomb, Vier Abhandl. über die Elekt. u. den Magn. Ostw. Klassiker Nr. 13; herausgeg. von Walter König, Leipzig 1890.

Der Vektor M_1 hat also im Magneten keine feste Lage, sondern nur eine feste Richtung. Die Richtung von M_1 heißt die magnetische Achse des Körpers.

Das Drehmoment ist Null, wenn M_1 und $\mathfrak{H}$ dieselbe Richtung haben, wenn also

$$\frac{M_{1x}}{\mathfrak{H}_x} = \frac{M_{1y}}{\mathfrak{H}_y} = \frac{M_{1z}}{\mathfrak{H}_z} = \gamma$$

ist, denn dann werden die Gleichungen (116) alle Null.

Hat $\mathfrak{H}$ die Richtung der x-Achse und liegt die magnetische Achse des Magneten in der xy-Ebene, so daß sie um den Winkel ϑ nach der y-Achse hin von der x-Achse abweicht, so ist

$$M_{1x} = |M_1| \cos\vartheta \qquad \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}$$

$$M_{1y} = |M_1| \sin\vartheta \qquad \mathfrak{H}_y = 0,$$

also

$$\mathfrak{N}_z = -|\mathfrak{H}| \cdot |M_1| \sin\vartheta. \tag{117}$$

Der Magnet hat also das Bestreben, ϑ zu verkleinern. $\vartheta = \pi$ ist eine labile Gleichgewichtslage; denn bringt man den Magneten ein wenig aus dieser Lage heraus, so wird er sich so einstellen, daß $\vartheta = 0$ ist.

Diese Eigenschaft des Magneten, sich in die Richtung des Feldes zu stellen, benutzt man vielfach zum Vergleich verschiedener Magnetfelder, z. B. des Erdfeldes mit dem eines Magneten. Sei die Horizontalkomponente des Erdfeldes H und werde senkrecht dazu das horizontale Feld $\mathfrak{H}$ erzeugt, so dreht sich die Magnetnadel, deren Achse ursprünglich die Richtung von H hatte, in die Richtung der Resultierenden von H und $\mathfrak{H}$, also um den Winkel φ, der durch $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathfrak{H}}{H}$ bestimmt ist. In Wirklichkeit benutzt man z. B. bei der Tangentenbussole und beim Magnetometer diese Art der Messung (vgl. Nr. **12** und Nr. **25**).

35. Die Gaußsche Methode. Lenkt man einen Magneten mit horizontaler magnetischer Achse und vom freien Moment M_1, der um eine vertikale Achse drehbar ist, im Erdfelde mit der Horizontalkomponenten H ein wenig aus seiner Ruhelage ab, so vollführt er Schwingungen. In der Mechanik wird gezeigt, daß die ganze Schwingungsdauer T (Hin- und Rückgang) gegeben ist durch

die Formel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}, \tag{118}$$

wo J das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse, D die Direktionskraft, d. h. den Quotient aus Drehmoment und Ablenkungswinkel bedeutet.

Nach (117) ist D für kleine Winkel $M_1 H$. Durch Beobachtung von T und J kann man also $M_1 H$ bestimmen.

Legt man denselben Magneten ost-westlich, so erzeugt er in seiner $\left\{\begin{matrix}\text{Verlängerung (erste Hauptlage)}\\ \text{Äquatorialebene (zweite Hauptlage)}\end{matrix}\right\}$ ein Feld $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{H}_1\\ \mathfrak{H}_2\end{matrix}\right\}$, welches durch die Formeln in Nr. 31 gegeben ist. Dadurch wird eine kleine Magnetnadel, die im Abstande R vom Magnetzentrum in erster resp. zweiter Hauptlage sich befindet, um den Winkel φ_1 resp. φ_2 abgelenkt, so daß

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi_1 &= \frac{2M_1}{R^3 H}\left(1 + \frac{2}{R^2}\frac{M_2}{M_1}\right)\\ \operatorname{tg}\varphi_2 &= \frac{M_1}{R^3 H}\left(1 - \frac{3}{2R^2}\frac{M_2}{M_1}\right) \end{aligned} \tag{118'}$$

ist. Lenkt man aus zwei verschiedenen Entfernungen ab, so kann man $\frac{M_2}{M_1}$ eliminieren und erhält $\frac{M_1}{H}$.

Kennt man $M_1 H$ durch die Schwingungen und $\frac{M_1}{H}$ durch die Ablenkungen, so kann man M_1 und H einzeln berechnen.

Dies ist der Grundgedanke der Gaußschen Methode, magnetische Momente und die Horizontalintensität des Erdfeldes zu messen.

Analog dem freien Moment definiert man das wahre Moment eines Magneten durch die Formeln

$$M_x = \int \varrho x\, dS = -\int x \operatorname{div}\mathfrak{M}_\omega\, dS$$

usw.

Durch partielle Integration ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß $\mathfrak{M}_\omega$ unmittelbar an der Oberfläche des Magneten Null wird,

$$M_x = \int \mathfrak{M}_x^{(\omega)} dS, \quad M_y = \int \mathfrak{M}_y^{(\omega)} dS, \quad M_z = \int \mathfrak{M}_z^{(\omega)} dS. \tag{119}$$

Die wahre Magnetisierung ist also das wahre magnetische Moment der Volumeinheit.

Ebenso ist das induzierte Moment

$$M_x' = -\int \frac{x}{4\pi} \operatorname{div}(\mu_r - 1)\mathfrak{H} dS = \int \varkappa_r \mathfrak{H}_x dS$$

usw.

Die induzierte Magnetisierung $\varkappa_r \mathfrak{H}$ ist also das induzierte Moment der Volumeinheit.

Die Summe aus wahrem und induziertem Moment nennt man in der Technik schlechtweg Moment (freies Moment), es ist

$$\int \left(\mathfrak{M}^{\omega} + \frac{\mu_r - 1}{4\pi}\mathfrak{H}\right) dS = \int \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}}{4\pi} dS = \int \mathfrak{M}\, dS = \int \varkappa \mathfrak{H} dS,$$

die Magnetisierung $\mathfrak{M}$ ist also das Moment der Volumeinheit.

Zur Bestimmung der Magnetisierungskurve nach der in Nr. **25** beschriebenen magnetometrischen Methode benutzt man die Ablenkung einer horizontalen Magnetnadel, die um eine vertikale Achse drehbar ist (Magnetometer), auf Grund der Formeln (118′) oder, falls Ellipsoide vorliegen, (80″) resp. (80‴), indem man die Horizontalintensität des Erdfeldes als bekannt ansieht, und den Ablenkungswinkel φ mißt, den die Magnetometernadel erfährt. Ellipsoide sind zur Messung am geeignetsten, weil in ihrem Innern $\mathfrak{H}$ gleichförmig ist, so daß in Strenge $M_1 = \int \varkappa \mathfrak{H} dS = \varkappa \mathfrak{H} S$ gilt.

36. Die Kräfte auf polarisierbare starre Körper ohne wahren Magnetismus. Nach (111) lautet die Gesamtkraft auf Körper ohne wahren Magnetismus

$$\mathfrak{F}_x = -\frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{H}^2 \frac{\partial(\mu - 1)}{\partial x} dS. \tag{120}$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\mathfrak{F}_x = \frac{1}{8\pi}\int (\mu - 1)\frac{\partial \mathfrak{H}^2}{\partial x} dS. \tag{121}$$

Ist $(\mu - 1)$ eine kleine Zahl, deren Quadrate zu vernachlässigen sind, so darf man statt des wirklichen Feldes das ursprüngliche $\mathfrak{H}_0$ setzen, und erhält

$$\mathfrak{F}_x = \frac{1}{8\pi}\int (\mu - 1)\frac{\partial \mathfrak{H}_0^2}{\partial x} dS. \tag{122}$$

Ebenso ist

$$\mathfrak{N}_z = \frac{1}{8\pi}\int (\mu - 1)\left(x\frac{\partial \mathfrak{H}_0^2}{\partial y} - y\frac{\partial \mathfrak{H}_0^2}{\partial x}\right) dS. \tag{122′}$$

Bringt man also in ein inhomogenes Feld $\mathfrak{H}_0$ einen polarisierbaren Körper, so wirkt auf jede Volumeinheit eine Kraft mit der x-Komponente

$$\mathfrak{f}_x = \frac{\varkappa}{2} \frac{\partial \mathfrak{H}_0^2}{\partial x},$$

d. h. jedes Volumelement eines $\left\{\begin{matrix}\text{para}\\ \text{dia}\end{matrix}\right\}$magnetischen Körpers ist bestrebt, Stellen $\left\{\begin{matrix}\text{größerer}\\ \text{kleinerer}\end{matrix}\right\}$ Feldstärke aufzusuchen.

Ist das ursprüngliche Feld in Strenge homogen, so ist $\frac{\partial \mathfrak{H}_0^2}{\partial x} = 0$, also $\frac{\partial \mathfrak{H}^2}{\partial x}$ proportional $\varkappa$, weil $\mathfrak{H}$ nur insofern inhomogen ist, als die Gleichförmigkeit des Feldes durch das Hineinbringen des Körpers gestört ist. In homogenen Feldern wird demnach die Kraftwirkung proportional $\varkappa^2$, d. h. sehr klein, und es ist kein Unterschied im Verhalten paramagnetischer und diamagnetischer Körper vorhanden.

Wir wollen einen Ausdruck für die Arbeit der magnetischen Kräfte bei einer virtuellen Verschiebung ableiten. In magnetostatischen Feldern gilt allgemein

$$\partial A = -\delta W_m.$$

Denken wir uns die Permeabilität μ des Körpers, der keine wahre magnetische Mengen besitzt, durch die Permeabilität 1 der umgebenden Luft ersetzt, ohne daß sonst etwas geändert würde, und nennen wir für diesen Fall die Energie W_{mo}, so ist

$$\delta W_{mo} = 0,$$

da bei Verschiebungen dieses Körpers sich gar nichts ändert, also darf man schreiben

(123) $$\partial A = -\delta (W_m - W_{mo}).$$

Nun ist aber

(124) $$W_m - W_{mo} = \frac{1}{8\pi} \int (\mu \mathfrak{H}^2 - \mathfrak{H}_0^2)\, dS$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{H} (\mu \mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0)\, dS + \frac{1}{8\pi} \int (\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0) \mathfrak{H}_0\, dS.$$

Wir zerlegen den Raum durch die Röhren des Vektors $\mu \mathfrak{H} - \mathfrak{H}_0$, der ohne Anfangs- und Endpunkte ist, da die wahren Mengen in

beiden Fällen dieselben sein sollen. Den Querschnitt solcher Röhren nennen wir $d\sigma$, ein Längenelement derselben ds, dann ist

$$\frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{H}\,(\mu\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_0)\,dS = \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\sigma\ s} d\sigma\,ds\,(\mu\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_0)\,\mathfrak{H}_s .$$

Da aber $(\mu\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_0)\,d\sigma$ längs s konstant ist, wegen der Solenoidalität des Vektors $\mu\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_0$, so wird dieser Ausdruck

$$\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\sigma}(\mu\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_0)\,d\sigma\int \mathfrak{H}_s\,ds .$$

Da ferner für jede geschlossene Kurve $\int \mathfrak{H}_s\,ds = 0$ ist, so bleibt in (124) nur der zweite Term, und es ist

$$(124') \qquad W_m - W_{mo} = \frac{1}{8\pi}\int(\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_0)\,\mathfrak{H}_0\,dS .$$

Im Außenraum ist $\mu = 1$, wir dürfen also schreiben

$$(124'') \quad W_m - W_{mo} = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{S_i}(\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_0)\,\mathfrak{H}_0\,dS_i + \frac{1}{8\pi}\int\limits_{S_a}\mathfrak{H}_0\,(\mu\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_0)\,dS_a ,$$

wenn S_i resp. S_a den Innenraum resp. das Äußere des Körpers bezeichnen.

Nun ist

$$\frac{1}{8\pi}\int\limits_{S}\mathfrak{H}_0\,(\mu\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_0)\,dS = 0$$

aus demselben Grunde wie oben $\frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{H}\,(\mu\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_0)\,dS = 0$, also ist

$$\frac{1}{8\pi}\int\limits_{S_a}\mathfrak{H}_0\,(\mu\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_0)\,dS_a = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_{S_i}\mathfrak{H}_0\,(\mu\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_0)\,dS_i ,$$

und aus (124″) wird

$$(125) \quad W_m - W_{mo} = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_{S_i}(\mu-1)\,\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}\,dS_i = -\frac{1}{2}\int\limits_{S_i}\mathfrak{M}\mathfrak{H}_0\,dS_i .$$

Dieser Ausdruck hat den Vorteil, daß er nur Beiträge im Innern des polarisierbaren Körpers gibt.

Somit ergeben sich die Kräfte nach (123) und (125) aus

$$\partial A = \frac{1}{2}\,\delta \int \mathfrak{M}\,\mathfrak{H}_0\,dS_i .$$

Bringt man z. B. eine Kugel vom Radius a in ein gleichförmiges Feld, so ist (vgl. Nr. **20**, S. 44)

$$\mathfrak{M} = \frac{3}{4\pi}\,\frac{\mu-1}{\mu+2}\,\mathfrak{H}_0 ,$$

also

$$\partial A = \delta\,\frac{3}{8\pi}\,\frac{\mu-1}{\mu+2}\int \mathfrak{H}_0^2\,dS_i = \delta\,\frac{a^3}{2}\,\frac{\mu-1}{\mu+2}\,\mathfrak{H}_0^2 .$$

Der Ausdruck unter dem Variationszeichen ändert sich durch Verschiebungen in einem streng gleichförmigen Felde nicht. Ist aber das Feld nicht genau gleichförmig, doch so, daß $\mathfrak{H}_0$ nicht merklich innerhalb der Kugel variiert, so erhält man

$$\partial A = \frac{a^3}{2}\,\frac{\mu-1}{\mu+2}\,\delta\mathfrak{H}_0^2 ,$$

also

$$\mathfrak{F}_x = \frac{a^3}{2}\,\frac{\mu-1}{\mu+2}\,\frac{\partial \mathfrak{H}_0^2}{\partial x} ,$$

d. h. eine $\left\{\begin{matrix}\text{para}\\ \text{dia}\end{matrix}\right\}$magnetische Kugel wird zu Stellen $\left\{\begin{matrix}\text{größerer}\\ \text{kleinerer}\end{matrix}\right\}$ Feldstärke gezogen.

Dieses Resultat hatten wir für einen beliebigen Körper von sehr kleiner Suszeptibilität bereits abgeleitet.

Wir bringen ein verlängertes Rotationsellipsoid mit horizontaler Rotationsachse in ein gleichförmiges Magnetfeld, und zwar sei es um die vertikale z-Achse drehbar. Wir legen das Koordinatensystem so, daß die x-Achse mit der großen Achse des Ellipsoids zusammenfällt, dann ist

$$\mathfrak{M}_x = \frac{\varkappa \mathfrak{H}_{0x}}{1+\varkappa P}, \qquad \mathfrak{M}_y = \frac{\varkappa \mathfrak{H}_{0y}}{1+\varkappa P'}, \qquad \text{(vgl. Nr. 22)}$$

wenn P und P' die Entmagnetisierungskoeffizienten für Felder parallel resp. senkrecht zur großen Achse bedeuten.

Also ist

$$\partial A = \frac{1}{2}\,\delta \int \left\{ \frac{\varkappa \mathfrak{H}_{0x}^2}{1+\varkappa P} + \frac{\varkappa(\mathfrak{H}_{0y}^2 + \mathfrak{H}_{0z}^2)}{1+\varkappa P'} \right\} dS .$$

Nennen wir die Horizontalkomponente des ungestörten Feldes H, den Winkel, den sie mit der großen Ellipsoidachse bildet, ϑ, so sind

$$\mathfrak{H}_{0x} = H\cos\vartheta \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}_{0y} = H\sin\vartheta$$

bei Drehungen des Ellipsoids variabel, während $\mathfrak{H}_0$, bei Drehungen konstant bleibt.

Also erhalten wir

$$\partial A = \mathfrak{N}_z\,\delta\vartheta = -\varkappa S H^2\left(\frac{\cos\vartheta\sin\vartheta}{1+\varkappa P} - \frac{\cos\vartheta\sin\vartheta}{1+\varkappa P'}\right)\delta\vartheta,$$

d. h.

$$\mathfrak{N}_z = \frac{\varkappa}{2} S H^2 \sin 2\vartheta\left(\frac{1}{1+P'\varkappa} - \frac{1}{1+P\varkappa}\right).$$

Durch Messung dieses Drehmomentes hat man Suszeptibilitäten bestimmt.[1])

Wir wollen Magnetfelder von bestimmten Symmetrieeigenschaften betrachten, weil wir aus ihnen die Deutung von Versuchen kennen lernen, die für die Benennung der para- und diamagnetischen Körper maßgebend war.[2])

Wir betrachten ein Feld, welches in der z-Achse die Richtung der z-Achse selbst hat, und dessen $\mathfrak{H}$-Linienfeld symmetrisch um die z-Achse und bis auf die Richtung symmetrisch bez. der xy-Ebene ist.

Ein solches Feld wird z. B. durch den Strom einer Tangentenbussole erzeugt, deren Kreisebene in der xy-Ebene liegt und deren Zentrum sich im Koordinatenanfangspunkt befindet (Fig. 36b), oder auch durch zwei magnetische Mengen $\pm m$ in den Punkten $x=0,\ y=0,\ z=l$ resp. $x=0,\ y=0,\ z=-l$ der z-Achse (Fig. 36a).

In der Umgebung des Punktes $x=y=z=0$ hat das Feld die Form

$$\mathfrak{H}_x = a_1 + b_1x + c_1y + d_1z + e_1x^2 + f_1y^2 + g_1z^2 + h_1yz + i_1zx + k_1xy$$

$$\mathfrak{H}_y = a_2 + b_2x + c_2y + d_2z + e_2x^2 + f_2y^2 + g_2z^2 + h_2yz + i_2zx + k_2xy$$

$$\mathfrak{H}_z = a_3 + b_3x + c_3y + d_3z + e_3x^2 + f_3y^2 + g_3z^2 + h_3yz + i_3zx + k_3xy.$$

Vertauscht man z mit $-z$, so wechseln $\mathfrak{H}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ ihr Zeichen,

1) H. A. Rowland und W. Jacques, Amer. Journ. of science and arts (3) **18**, 1879, p. 360.

2) Vgl. R. Gans, Phys. Zeitschr. **9**, 1908, S. 10.

während $\mathfrak{H}_z$ es behält. Daraus folgt

$$a_1 = b_1 = c_1 = e_1 = f_1 = g_1 = k_1 = 0$$
$$a_2 = b_2 = c_2 = e_2 = f_2 = g_2 = k_2 = 0$$
$$d_3 = h_3 = i_3 = 0.$$

Vertauscht man x mit $-x$, so wechselt $\mathfrak{H}_x$ sein Zeichen, während $\mathfrak{H}_y$ und $\mathfrak{H}_z$ es behalten. Daraus folgt

$$d_1 = h_1 = 0; \quad i_2 = 0; \quad b_3 = k_3 = 0.$$

Vertauscht man y mit $-y$, so behalten $\mathfrak{H}_x$ und $\mathfrak{H}_z$ ihr Zeichen, während $\mathfrak{H}_y$ es ändert. Daraus folgt

$$d_2 = 0, \quad c_3 = 0.$$

Damit sind die Spiegelungen bez. der xy, yz, zx-Ebene berücksichtigt. Wir haben

$$\mathfrak{H}_x = i_1 xz, \quad \mathfrak{H}_y = h_2 yz \quad \mathfrak{H}_z = a_3 + e_3 x^2 + f_3 y^2 + g_3 z^2.$$

Dreht man das Koordinatensystem um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ um die z-Achse, so darf sich wegen der Symmetrieeigenschaft der z-Achse nichts ändern. Dabei geht aber x in $-y$ und y in $+x$ über.

Daraus folgt

$$h_2 = i_1, \quad f_3 = e_3,$$

so daß wir erhalten

$$\mathfrak{H}_x = i_1 xz, \quad \mathfrak{H}_y = i_1 yz, \quad \mathfrak{H}_z = a_3 + e_3 (x^2 + y^2) + g_3 z^2.$$

Aus der Gleichung $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$ folgt $i_1 = -g_3$; aus den Gleichungen $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0$ folgt $i_1 = 2e_3$, also $e_3 = -\frac{g_3}{2}$, so daß das endgültige Resultat mit anderer Bezeichnung der Buchstaben ist

$$\mathfrak{H}_x = -Axz, \quad \mathfrak{H}_y = -Ayz, \quad \mathfrak{H}_z = B + Az^2 - \frac{A}{2}(x^2 + y^2).$$

Wir bilden $\mathfrak{H}^2$, berücksichtigen aber dabei nur die Glieder, die in den Koordinaten höchstens die zweite Ordnung haben, und erhalten

$$\mathfrak{H}^2 = B^2 + 2ABz^2 - AB(x^2 + y^2)$$
$$= \text{const} + Cz^2 - \frac{C}{2}(x^2 + y^2).$$

Ist $C > 0$, d. h. haben A und B gleiches Vorzeichen, so werden die Feldlinien dichter, wenn man vom Koordinatenursprung aus sich auf der z-Achse bewegt, dünner, wenn man senkrecht zur z-Achse vorwärtsschreitet (vgl. Fig. 36 a). Ist dagegen $C < 0$, d. h. haben A und B verschiedene Vorzeichen, so bedeutet das, daß das Feld stärker wird beim Fortschreiten senkrecht zu der z-Achse und schwächer beim Fortschreiten in Richtung der z-Achse (vgl. Fig. 36 b).

Ist die x-Achse vertikal nach oben gerichtet, so erleidet ein

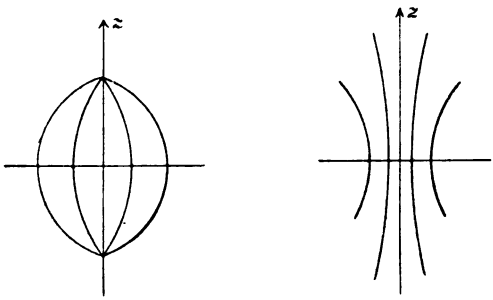

Fig. 36 a und 36 b.

horizontales Stäbchen, welches, an einem Faden hängend, um die x-Achse drehbar ist, das Drehmoment (vgl. (122′) S. 83)

$$\mathfrak{N}_x = \int (\mathfrak{f}_z y - \mathfrak{f}_y z)\, dS = \frac{1}{8\pi} \int (\mu - 1) \left(y \frac{\partial \mathfrak{H}_0^2}{\partial z} - z \frac{\partial \mathfrak{H}_0^2}{\partial y} \right) dS$$

$$= 3 \frac{\varkappa}{2} C \int yz\, dS,$$

denn das $\mathfrak{H}^2$ der vorigen Seite ist natürlich, wenn wir einen Körper ins Feld bringen, durch $\mathfrak{H}_0^2$ zu ersetzen.

Nennen wir den Winkel, den das Stäbchen mit der y-Achse bildet, ϑ, den Querschnitt des Stäbchens q, so ist

$$y = s \cos \vartheta, \quad z = s \sin \vartheta, \quad dS = q ds,$$

also

$$\mathfrak{N}_x = \frac{3}{4} \varkappa C \sin 2\vartheta \int s^2 q\, ds.$$

Das Integral ist das Trägheitsmoment des Stäbchens bezüglich der Drehachse, falls die Dichte des Stabes gleich 1 angenommen wird.

Bei $\left\{\begin{matrix}\text{para}\\ \text{dia}\end{matrix}\right\}$magnetischen Körpern ist $\mathfrak{N}_x \gtrless 0$, wenn $C > 0$ ist; d. h. in Feldern vom Typus der Fig. 36a stellt sich ein $\left\{\begin{matrix}\text{para}\\ \text{dia}\end{matrix}\right\}$magnetisches Stäbchen $\left\{\begin{matrix}\parallel\\ \perp\end{matrix}\right\}$ zu den Feldlinien. Ist dagegen $C < 0$, d. h. in Feldern vom Typus der Fig. 36b stellt sich ein $\left\{\begin{matrix}\text{para}\\ \text{dia}\end{matrix}\right\}$magnetisches Stäbchen $\left\{\begin{matrix}\perp\\ \parallel\end{matrix}\right\}$ zu den Feldlinien. Dieses Verhalten möge besonders betont werden, da häufig fälschlich als Definition $\left\{\begin{matrix}\text{para}\\ \text{dia}\end{matrix}\right\}$magnetischer Körper ihre Einstellung $\left\{\begin{matrix}\parallel\\ \perp\end{matrix}\right\}$ zu den Feldlinien in einem beliebigen Felde benutzt wird.

37. Permeabilität von Flüssigkeiten. Steighöhenmethode. Nach (110) ist die Kraft auf die Volumeinheit eines ungeladenen polarisierbaren Körpers

$$\mathfrak{k}_x = -\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2\frac{\partial\mu}{\partial x} \quad \text{usw.}$$

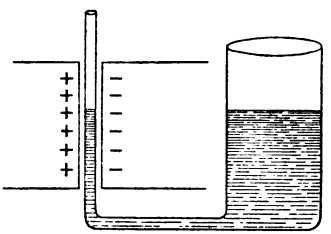

Fig. 37.

Es befinde sich eine homogene Flüssigkeit, deren Permeabilität genähert 1 ist, so daß wir $\mathfrak{H}_0^2$ für $\mathfrak{H}^2$ setzen dürfen in einem gleichförmigen Felde, sie grenze an Luft, dann finden nur Kraftwirkungen in der Übergangsschicht der Flüssigkeit in Luft statt, da nur hier μ örtlich variiert. Die auf ein Volumelement der Grenzschicht mit der Grundfläche $d\sigma$ wirkende Kraft ist

$$d\mathfrak{k}_x = -\frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}_0^2\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial\mu}{\partial x}\,dx\,d\sigma.$$

Hier bedeutet x_1 einen Punkt in der Flüssigkeit in der Nähe der Oberfläche, x_2 einen Punkt in der Luft, der dem Punkte x_1 gerade gegenüber liegt. Wir haben also die x-Achse in die Richtung der Normalen des betrachteten Flächenelements gelegt. Die Integration nach x ergibt

$$d\mathfrak{k}_x = \frac{(\mu-1)}{8\pi}\mathfrak{H}^2\,d\sigma = \frac{\varkappa}{2}\mathfrak{H}^2\,d\sigma.$$

Es wirkt also ein normaler Druck p von der Größe $\frac{\varkappa}{2}\mathfrak{H}^2$ auf die

Oberfläche der Flüssigkeit, der die Grenzfläche in der Richtung nach der Luft hin zu verschieben sucht, wenn $\varkappa > 0$ ist.

Quincke hat Permeabilitäten dadurch gemessen, daß er in ein gleichförmiges Feld die Grenzfläche einer Flüssigkeit gegen Luft in einer engen Röhre brachte (vgl. Fig. 37); die Flüssigkeit stieg infolge des magnetischen Drucks, bis dieser durch hydrostatischen Druck kompensiert war.[1])

38. Die Kräfte im elektromagnetischen Felde. Wir nehmen im Felde Stromkreise und permanente Magnete an. Wir hatten (S. 74 (100)) gesehen, daß

$$\partial A = \sum i \delta Q - \delta W_m$$

ist.

Nun ist

$$W_m = \int \frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2 dS.$$

Das Feld $\mathfrak{H}_0$ der permanenten Magnete und die Felder $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$ der Stromkreise $1, 2, \ldots, n$ superponieren sich einfach, wenn die Permeabilität der Medien konstant ist. Also ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 + \cdots + \mathfrak{H}_n$$

und

$$\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{H}_0^2 + \mathfrak{H}_1^2 + \mathfrak{H}_2^2 + \cdots + \mathfrak{H}_n^2 + 2\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_1 + 2\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_2 + \cdots + 2\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_n + 2\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2 + \cdots$$

oder

$$W_m = W_0 + W_1 + \cdots + W_n + W_{01} + W_{02} + \cdots + W_{0n} + W_{12} + \cdots.$$

$W_{01} + W_{02} + \cdots + W_{0n}$ können wir die wechselseitige Energie der Magnete und Stromkreise nennen. Wir wollen zeigen, daß diese Null ist.

Es ist

$$(126) \qquad W_{01} = \int \frac{\mu}{4\pi} \mathfrak{H}_0 \mathfrak{H}_1 \, dS = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma_1 \; s} \mu \mathfrak{H}_{1n} \, d\sigma \, \mathfrak{H}_{0s} \, ds.$$

Der letzte Teil der Gleichung entsteht dadurch, daß wir als Raumelemente die Röhren des Vektors $\mu\mathfrak{H}_1$ einführen, dessen Längenelemente wir ds, dessen Querschnitte wir $d\sigma$ nennen. Wir erhalten sämtliche in Betracht kommenden Raumelemente, indem wir über

1) G. Quincke, Ann. Phys. Chem. (3) **24**, 347 (1885); H. du Bois, Ann. Phys. Chem. (3) **35**, 137 (1888).

die Fläche σ_1 integrieren, die den Stromkreis 1 zur Randkurve hat, weil alle $\mathfrak{H}_1$-Linien diese Fläche durchsetzen müssen. Da nun $\mu\mathfrak{H}_{1n}d\sigma$ an jeder Stelle der $\mu\mathfrak{H}_1$-Linie denselben Wert hat (Solenoidalitätseigenschaft des Vektors $\mu\mathfrak{H}_1$), so können wir $\mu\mathfrak{H}_{1n}d\sigma$ in (126) aus dem Integral über s herausnehmen, und erhalten

$$W_{01} = \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma_1} \mu\mathfrak{H}_{1n}\,d\sigma \int_s \mathfrak{H}_{0s}\,ds = 0,$$

da das Linienintegral nach Nr. 4 (3′) verschwindet, weil wir unter $\mathfrak{H}_0$ das Teilfeld der permanenten Magnete verstehen, d. h. das Feld, welches vorhanden ist, wenn alle $i = 0$ sind.

Ebenso ist

$$W_{02} = \cdots = W_{0n} = 0,$$

also folgt:

Die wechselseitige Energie zwischen Magneten und Stromkreisen ist Null; d. h. die Energien der Magnete und Stromkreise addieren sich einfach.

Ferner ist $\mathfrak{H}_1$ proportional i_1, $\mathfrak{H}_2$ proportional i_2, …, $\mathfrak{H}_n$ proportional i_n, also bestehen die Gleichungen

$$W_1 = \tfrac{1}{2}p_{11}i_1^2,\quad W_2 = \tfrac{1}{2}p_{22}i_2^2,\quad \ldots,\quad W_n = \tfrac{1}{2}p_{nn}i_n^2.$$

Der Koeffizient p_{nn} hängt nur von der räumlichen Anordnung des $n$ten Stromkreises und von der Permeabilität in jedem Punkte des Feldes $\mathfrak{H}_n$ ab, er heißt der Selbstinduktionskoeffizient des $n$ten Stromkreises.

Ferner ist

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi}\int \mu\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2\,dS = \frac{1}{4\pi}\int_s\int_{\sigma_1} \mu\mathfrak{H}_{1n}\,d\sigma\,\mathfrak{H}_{2s}\,ds,$$

indem wir wiederum als Raumelemente die Röhren der $\mu\mathfrak{H}_1$-Linien nehmen; wir können obigen Ausdruck auf die Form bringen

$$\int_{\sigma_1} \mu\mathfrak{H}_{1n}\,d\sigma\,\frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{H}_{2s}\,ds.$$

Nun sind die Linienintegrale $\frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{H}_{2s}\,ds = \begin{cases} i_2 \\ 0 \end{cases}$, je nachdem die betrachtete $\mu\mathfrak{H}_1$-Linie den zweiten Stromkreis umzingelt oder nicht, d. h. es ist

$$W_{12} = i_2 Q_{12},$$

wo unter Q_{12} die Zahl der $\mu\mathfrak{H}_1$-Linien zu verstehen ist, welche der Stromkreis 1 durch die Fläche σ_2 des Stromkreises 2 hindurchsendet.

Nun ist Q_{12} proportional der Stromstärke i_1, also können wir schreiben

$$Q_{12} = p_{12} i_1, \quad \text{d. h.} \quad W_{12} = p_{12} i_1 i_2.$$

Ebensogut können wir aber

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi}\int \mu\mathfrak{H}_1 \mathfrak{H}_2 \, dS = \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma_2}\int_{s} \mu\mathfrak{H}_{2n} \, d\sigma \, \mathfrak{H}_{1s} \, ds$$

schreiben, indem wir als Raumelemente die Röhren des Vektors $\mu\mathfrak{H}_2$ wählen, und erhalten, wenn wir unter

$$Q_{21} = p_{21} i_2$$

die Anzahl der $\mu\mathfrak{H}_2$-Linien verstehen, welche der Stromkreis 2 durch die Fläche σ_1 des 1. Stromkreises sendet,

$$W_{12} = i_1 Q_{21} = p_{21} i_1 i_2,$$

so daß sich die Beziehung ergibt

$$p_{12} = p_{21}. \tag{127}$$

Diese Größe heißt der wechselseitige Induktionskoeffizient der Stromkreise 1 und 2.

Gleichung (127) bedeutet: Fließt im Stromkreis 1 ein Strom der Stärke 1, so sendet dieser ebenso viele Induktionslinien p_{12} durch die Fläche des Stromkreises 2 wie der Strom von der Stärke 1 im Stromkreise 2 durch die Fläche des Stromkreises 1 sendet.

Die magnetische Energie W_i der Stromkreise ist also eine quadratische Funktion der Stromstärken

$$W_i = \tfrac{1}{2}(p_{11} i_1^2 + p_{22} i_2^2 + \cdots + p_{nn} i_n^2 + 2 p_{12} i_1 i_2 + \cdots). \tag{128}$$

Wir können $p_{11} i_1 = Q_{11}$ — mit einem allerdings nicht ganz strengen Ausdruck[1]) — die Anzahl der Induktionslinien nennen, welche der Stromkreis 1 lediglich durch seine eigene Stromkurve,

1) Vgl. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, Leipzig 1900, S. 285.

und nicht durch die anderen Stromkurven, sendet. Dann ist

$$Q_1^{(i)} = Q_{11} + Q_{12} + \cdots + Q_{1n} = p_{11} i_1 + p_{12} i_2 + \cdots + p_{1n} i_n$$

die Anzahl der Induktionslinien, die im Ganzen durch die Stromkurve 1 hindurchgehen, abgesehen von den Induktionslinien, welche die permanenten Magnete hindurchsenden, so daß

$$W_i = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} i_\nu Q_\nu^{(i)} \tag{129}$$

und

$$W = W_0 + W_i = W_0 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} i_\nu Q_\nu^{(i)} \tag{130}$$

wird. Aus Gleichung (100) in Nr. 33, S. 74 folgt also

$$\partial A = \sum_{\nu=1}^{n} i_\nu \delta Q_\nu - \delta W_0 - \delta \sum_{\nu=1}^{n} \frac{i_\nu Q_\nu^{(i)}}{2}. \tag{131}$$

Hält man die Stromstärken konstant, so ist

$$\delta \sum i_\nu Q_\nu^{(i)} = \sum i_\nu \delta Q_\nu^{(i)}.$$

Ferner ist

$$Q_\nu = Q_\nu^{(i)} + Q_\nu^{(0)},$$

wenn $Q_\nu^{(0)}$ die Zahl der Induktionslinien bedeutet, welche die Magnete durch die νte Stromkurve senden. Also haben wir

$$\left\{ \begin{aligned} \partial A &= -\delta W_0 + \tfrac{1}{2} \sum i_\nu \delta Q_\nu^{(i)} + \sum i_\nu \delta Q_\nu^{(0)}, \\ &= -\delta W_0 + \delta W_i + \sum_{\nu=1}^{n} i_\nu \delta Q_\nu^{(0)}, \end{aligned} \right. \tag{132}$$

wo δW_i die Zunahme der von den Strömen herrührenden magnetischen Energie bedeutet, falls bei irgendwelchen virtuellen Verschiebungen die Stromstärken konstant bleibend gedacht werden.

Sind keine Ströme vorhanden, so ist, wie wir schon früher sahen

$$\partial A = -\delta W_0,$$

d. h. die Arbeit gleich der Abnahme der magnetischen Energie.

Sind keine Magnete vorhanden ($W_0 = 0$, $Q^{(0)} = 0$), so ist die Arbeit gleich der Zunahme der magnetischen Energie bei konstanten Strömen:

(133) $$\partial A = + \delta W_i.$$

Dieser letzte Satz widerspricht nicht etwa dem Energieprinzip, denn es finden noch andere Energieumsetzungen statt. Der Überschuß der Jouleschen Wärme über die chemisch-thermischen Energieleistungen $\sum i^2 w - E_i i$ ist eben gleich der doppelten Energieabnahme bei konstanten Strömen.

Da pi der Dimension nach ein Induktionsfluß ist, so ist (vgl. S. 6 u. S. 16)

$$[p] = \frac{[3]}{[i]} = [\mathrm{cm}].$$

39. Spezialisierungen. Es seien keine permanenten Magnete vorhanden, so daß (133) gilt. Ferner nehmen wir zunächst an, daß die Stromkurven nicht verschoben werden, sondern nur die polarisierbaren Körper. Dann ist

(134) $$\partial A = \delta \frac{1}{8\pi} \int \mu \mathfrak{H}^2 dS = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{H}^2 \delta\mu \, dS + \frac{1}{4\pi} \int (\mu \mathfrak{H} \delta \mathfrak{H}) \, dS.$$

Das letzte Integral läßt sich schreiben $\frac{1}{4\pi} \int_\sigma \int_s d\sigma \, |\mu \mathfrak{H}| \, \delta \mathfrak{H}_s \, ds$,

indem wir als Raumelemente die Induktionsröhren wählen. Da $|\mu \mathfrak{H}| \, d\sigma$ über eine ganze Röhre konstant ist, läßt sich diese Größe aus dem Integral herausnehmen, man erhält

$$\int |\mu \mathfrak{H}| \, d\sigma \, \frac{1}{4\pi} \int \delta \mathfrak{H}_s \, ds = \int |\mu \mathfrak{H}| \, d\sigma \, \delta i = 0,$$

da i konstant bleibt. Also ist mit Berücksichtigung von (107) S. 75

$$\partial A = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{H}^2 \delta\mu \, dS = - \frac{1}{8\pi} \int \left(\mathfrak{H}^2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \delta \xi_x + \cdots \right) dS,$$

d. h. auch wenn das Feld durch Ströme hervorgerufen wird, finden wir

$$\mathfrak{f}_x = - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad \text{usw.}$$

Schließlich wollen wir die Kraft auf die Stromkurve 1 ableiten, wenn das Feld durch Ströme und Magnete hervorgerufen wird. Bei einer virtuellen Verschiebung der Elemente der Strom-

kurve 1 bleibt die Energie der permanenten Magnete W_0 konstant, also ist nach (132)

$$(135)\quad \begin{cases} \partial A = \frac{1}{2} i_1^2 \delta p_{11} + i_1 i_2 \delta p_{12} + \cdots + i_1 i_n \delta p_{1n} + i_1 \delta Q_1^{(0)} \\ \quad = \frac{1}{2} i_1^2 \delta p_{11} + i_1 \delta Q_1', \end{cases}$$

wo Q_1' der Induktionsfluß ist, den das fremde Feld, also das Feld der permanenten Magnete und der anderen Stromkurven, durch die Fläche σ_1 der Stromkurve 1 hindurchsendet.

$\frac{1}{2} i_1^2 \delta p_{11}$ ergibt eine Kraft, welche bestrebt ist, die Selbstinduktion des Stromkreises zu vergrößern.

$i_1 \delta Q_1'$ soll umgeformt werden. Erteilen wir den Elementen ds der Stromkurve die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathfrak{s}$, so wird die Fläche, welche zur ursprünglichen Fläche σ durch die Stromkurve hinzukommt, aus Parallelogrammen bestehen mit den Seiten ds und $\delta \mathfrak{s}$. Die Projektionen des Flächeninhalts auf die Koordinatenebenen sind, wie in der analytischen Geometrie gezeigt wird,

$$(136)\quad \begin{cases} \delta \sigma_x = ds_z \delta \mathfrak{s}_y - ds_y \delta \mathfrak{s}_z \\ \delta \sigma_y = ds_x \delta \mathfrak{s}_z - ds_z \delta \mathfrak{s}_x \\ \delta \sigma_z = ds_y \delta \mathfrak{s}_x - ds_x \delta \mathfrak{s}_y, \end{cases}$$

also ist

$$\begin{aligned} \delta Q_1' = \int_{s_1} & \mu \mathfrak{H}_x' (\delta \mathfrak{s}_y ds_z - \delta \mathfrak{s}_z ds_y) \\ & + \mu \mathfrak{H}_y' (\delta \mathfrak{s}_z ds_x - \delta \mathfrak{s}_x ds_z) \\ & + \mu \mathfrak{H}_z' (\delta \mathfrak{s}_x ds_y - \delta \mathfrak{s}_y ds_x), \end{aligned}$$

wenn $\mathfrak{H}'$ das fremde Feld bedeutet. In anderer Anordnung ist

$$\delta Q_1' = \int_{s_1} (\mu \mathfrak{H}_z' ds_y - \mu \mathfrak{H}_y' ds_z) \delta \mathfrak{s}_x + \cdots,$$

folglich

$$(137)\quad \partial A = \int_{s_1} (\mu \mathfrak{H}_z' i_1 ds_y - \mu \mathfrak{H}_y' i_1 ds_z) \delta \mathfrak{s}_x + \cdots.$$

Es wirkt demnach auf das Element ds der Stromkurve eine Kraft, die senkrecht zur Feldrichtung und senkrecht zur Stromrichtung gerichtet ist, und zwar so, daß die positive Stromrichtung, die Feldrichtung und die Kraftrichtung ein Rechtssystem bilden,

denn die Klammern in (137) sind die Projektionen des Parallelogramms, welches aus den Vektoren $\mu \mathfrak{H}'$ und ids gebildet ist, senkrecht zur x, y, z-Achse.

Das ist die in jedem Motor wirksame Kraft. Auch die Kraft auf den Faden eines Saitengalvanometers oder eines Saitenunterbrechers ergibt sich aus (137). Diese Kraft kommt zu der oben besprochenen hinzu, welche die Selbstinduktion des Stromkreises zu vergrößern sucht.

Ist die Stromfläche starr und um eine vertikale Achse in einem gleichförmigen Felde mit der Horizontalkomponente H drehbar, und nennen wir den Winkel, den die Stromfläche σ mit H bildet, ϑ, so ist

$$Q_1' = \mu H \sigma \sin \vartheta,$$

also

$$\delta Q_1' = \mu H \sigma \cos \vartheta \, \delta \vartheta.$$

Das Drehmoment $\mathfrak{N}$ folgt aus

$$\delta A = \mathfrak{N} \delta \vartheta = i \delta Q_1' = i \mu H \sigma \cos \vartheta \, \delta \vartheta$$

$$\mathfrak{N} = i \mu H \sigma \cos \vartheta. \tag{138}$$

Das Drehmoment sucht den Winkel ϑ zu vergrößern, es stellt die Stromfläche so, daß möglichst viele Induktionslinien durch die Fläche hindurchgehen.

Die Formel für $\mathfrak{N}$ findet bei den Drehspulengalvanometern (siehe Nr. 42) und bei dem Koepselschen Magnetisierungsapparat Verwendung. Dieser Magnetisierungsapparat dient zur Bestimmung der Magnetisierungskurve von ferromagnetischen Stäben; er ist folgendermaßen konstruiert[1]):

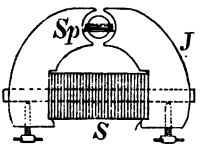

Fig. 38.

In eine Spule S wird ein Eisenstab gesteckt, dessen Magnetisierungskurve aufgenommen werden soll. Das Joch J ist durch einen dünnen Schlitz unterbrochen, so daß eine drehbare Spule Sp hineingebracht werden kann, in der ein bekannter Hilfsstrom i fließt. Diese dreht sich entsprechend der Induktionslinienzahl aus der in Fig. 38 gezeichneten Gleichgewichtslage heraus, bis die Torsionskraft des Auf-

1) A. Koepsel, Zeitschr. f. Instrum. **14**, 1894, 391; H. Kath, ibid. **18**, 1898, 33.

hängedrahtes dem elektromagnetischen Drehmoment $\mathfrak{N}$ gleich ist, und zwar findet die Drehung der Spule von rechteckiger Windungsfläche um einen Zylinder von weichem Eisen statt (in der Figur von oben gesehen), damit der magnetische Kreis möglichst vollständig bleibt. Dieser Magnetisierungsapparat hat den Vorteil, daß er ein Schlußjoch benutzt und trotzdem keine ballistische Messung verlangt, so daß man beliebig lange nach Erzeugung des Feldes die Induktion bestimmen kann, also frei von magnetischer Nachwirkung ist (vgl. Nr. 25 S. 53).

Ist der Querschnitt des Stromkreises $d\sigma$, so daß

$$i_1 = |\mathfrak{J}|\, d\sigma$$

ist, so folgt aus (137)

$$\partial A = \int \{(\mathfrak{J}_y \mu \mathfrak{H}_z' - \mathfrak{J}_z \mu \mathfrak{H}_y')\, \delta s_x + \cdots\}\, dS,$$

wenn $dS = d\sigma\, ds$ gesetzt wird; d. h. die Kraft auf die Volumeinheit ist

$$\mathfrak{f}_x = \mathfrak{J}_y \mu \mathfrak{H}_z - \mathfrak{J}_z \mu \mathfrak{H}_y \quad \text{usw.} \tag{139}$$

In der letzten Formel ist anstatt des fremden Feldes $\mathfrak{H}'$ wieder das Gesamtfeld $\mathfrak{H}$ gesetzt, denn man kann sich den Strom in so dünne Fäden zerlegt denken, daß die Abweichung des fremden Feldes vom Gesamtfeld unmerklich wird.

In demselben Sinne darf man für einen Stromfaden anstatt $\partial A = i\delta Q'$ schreiben

$$\partial A = i\delta Q.$$

Für diesen Stromfaden kommt auch das Glied $\frac{1}{2} i_1^2 \delta p_{11}$ nicht mehr in Betracht, wenn i_1 die Stromstärke des Stromfadens bedeutet.[1])

Setzen wir anstatt der virtuellen Verschiebung eine in der Zeit dt wirklich eintretende Verschiebung, so wird

$$\frac{\partial A}{dt} = i\,\frac{dQ}{dt}.$$

Andrerseits ist nach der zweiten Maxwellschen Gleichung

$$-\int \mathfrak{E}_s\, ds = -iw = \frac{dQ}{dt},$$

falls keine Elemente im Stromkreis liegen, sondern der ganze Strom durch Induktion hervorgerufen wird.

1) Vgl. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld, Leipzig 1900, S. 257.

Setzt man i aus dieser Gleichung in die Gleichung für $\frac{\partial A}{dt}$ ein, so erhält man

$$\frac{\partial A}{dt} = -\frac{1}{w}\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2.$$

Die Arbeit, welche bei der Bewegung eines geschlossenen Leiterkreises in einem Magnetfelde von den Kräften des Systems geleistet wird, ist stets negativ, d. h. es treten infolge der Bewegung Induktionsströme auf, so daß der Stromkreis durch das Magnetfeld Kräfte erfährt, welche die vorhandene Bewegung zu hemmen suchen (Lenzsche Regel).

War schon ursprünglich im Stromkreise ein etwa durch Elemente hervorgerufener Strom vorhanden, so wird dieser infolge der Bewegung geschwächt, wenn man ihn nicht künstlich konstant hält.

Schickt man in den Anker eines Motors Strom, so dreht er sich in bestimmter Richtung (infolge der magnetischen Kräfte); dreht man den Anker in dieser Richtung, so liefert die Maschine Strom in entgegengesetzter Richtung (infolge der magnetischen Induktion); die Maschine funktioniert als Dynamomaschine. Ein laufender Motor ist also zu gleicher Zeit Motor und Dynamomaschine; hält man den stromdurchflossenen Anker eines Motors fest, so ist der Strom stärker, als wenn man den Anker sich drehen läßt, weil bei festgehaltenem Anker die gegenelektromotorische Kraft der Induktion nicht auftritt.

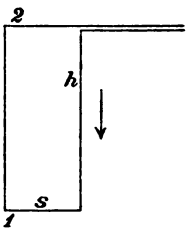

Fig. 39.

Befindet sich das vom Strom i durchflossene Rechteck (Fig. 39) in einem Magnetfelde, dessen $\mathfrak{H}$-Linien die Fläche senkrecht durchsetzen, und hat das Rechteck die Möglichkeit, sich in der Pfeilrichtung zu verschieben, so ist

$$\partial A = i(\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}_2)\, s\, \delta h = \mathfrak{F}\, \delta h$$

oder

$$\mathfrak{F} = i(\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}_2)\, s,$$

wenn $\mathfrak{H}_1$ resp. $\mathfrak{H}_2$ die als gleichförmig angenommenen Felder an den Stellen 1 resp. 2 der horizontalen Rechtecksseiten der Länge s bedeuten.

Bestimmt man die Kraft $\mathfrak{F}$, indem man die Fläche an der Wage aufhängt und kennt man s und i, so folgt daraus $\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}_2$ in

absolutem Maße. Ist $\mathfrak{H}_2 = 0$, so findet man $\mathfrak{H}_1$, d. h. es lassen sich mit dieser Vorrichtung (Cottonsche Wage) magnetische Feldstärken messen.[1])

40. Selbstinduktionskoeffizienten und wechselseitige Induktionskoeffizienten. Sind um einen geschlossenen Ring von der Permeabilität μ, vom Querschnitt σ und von der Länge l N Windungen Leitungsdraht in fortlaufender Spirale gelegt, in denen der Strom i fließt, so existiert, wie wir Nr. 5 (8) gesehen haben, nur im Innern ein Feld, und es ist

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi N i}{l} = 4\pi n i,$$

also ist die Energie

$$W = \int \frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2 dS = \frac{p}{2} i^2 = \frac{2\pi\mu N^2 i^2 \sigma}{l},$$

d. h.

$$p = 4\pi\mu \frac{N^2\sigma}{l} = 4\pi\mu n^2 \sigma l. \tag{140}$$

Ist der Kreis geschlitzt, so ist

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H}_a = \frac{4\pi N i}{\frac{l_i}{\mu} + l_a}, \qquad \mathfrak{H}_i = \frac{\mathfrak{B}}{\mu},$$

also

$$W = \frac{\sigma}{8\pi}(\mu \mathfrak{H}_i^2 l_i + \mathfrak{H}_a^2 l_a) = \frac{\sigma}{8\pi} \mathfrak{B}^2 \left(\frac{l_i}{\mu} + l_a\right) = \frac{2\pi N^2 i^2 \sigma}{\frac{l_i}{\mu} + l_a},$$

d. h.

$$p = \frac{4\pi N^2 \sigma}{\frac{l_i}{\mu} + l_a}, \tag{140'}$$

der Selbstinduktionskoeffizient wird also bei großem μ schon durch einen schmalen Luftschlitz beträchtlich verkleinert (z. B. Papierbogen in einer Drosselspule).

Die Formel für die Selbstinduktion eines Ringes gilt auch für die eines sehr langen Solenoids. Man bilde $\frac{\partial p}{\partial l} = \mu 4\pi n^2 \sigma$; das bedeutet: um diesen Betrag wächst die Selbstinduktion eines langen Solenoids, wenn man es um die Längeneinheit verlängert, und

1) A. Cotton, Journ. phys. (3) **9**, 1900, S. 383; A. Cotton und P. Weiß, Journ. phys. (4) **6**, 1907, S. 429.

zwar gilt diese Formel unabhängig von der Unregelmäßigkeit der Feldlinien an den Enden.

Um einen Ring sei eine Primärspule von N_1 Windungen und eine Sekundärspule von N_2 Windungen gelegt. Fließt in der Primärspule der Strom i_1, so ist das Feld im Ring $\mathfrak{H}_1 = 4\pi \frac{N_1 i_1}{l}$. Dieses tritt durch die N_2 Windungen der Sekundärspule von der Windungsfläche $N_2\sigma$, so daß

$$Q_{12} = \mu 4\pi \frac{N_1 i_1 N_2 \sigma}{l},$$

und folglich

$$p_{12} = \mu 4\pi \frac{N_1 N_2 \sigma}{l} = 4\pi \mu n_1 n_2 \sigma l \tag{141}$$

ist, wo

$$\frac{N_1}{l} = n_1, \quad \frac{N_2}{l} = n_2$$

bedeutet.

Schließt man plötzlich in der Primärspule den Strom i_1, so ist nach der zweiten Maxwellschen Gleichung

$$-E_2 = -\int \mathfrak{E}_s\, ds = \frac{d}{dt}\int_{\sigma_2} \mathfrak{B}_n\, d\sigma = \frac{d}{dt}(p_{12} i_1 + p_{22} i_2)$$

oder die integralelektromotorische Kraft

$$\int_0^\infty F_2\, dt = -\,|p_{12} i_1 + p_{22} i_2|_{t=0}^{t=\infty};$$

zur Zeit $t = 0$ ist aber $i_1 = 0$ und $i_2 = 0$,

„ „ $t = \infty$ „ „ $i_1 = i_1$ „ $i_2 = 0$.

Also ist $\int_0^\infty E_2\, dt = -p_{12} i_1$. Nun ist aber nach dem Ohmschen Gesetze

$$\int_0^\infty E_2\, dt = w_2 \int_0^\infty i_2\, dt = w_2 e,$$

wenn e den Integralstrom, d. h. die gesamte durch den zweiten Stromkreis geflossene Elektrizitätsmenge bedeutet; also ist

$$e = -\frac{p_{12} i_1}{w_2}. \tag{142}$$

Kennt man die wechselseitige Induktion der beiden Stromkreise und den Widerstand der Sekundärleitung, so kann man die Elektrizitätsmenge e berechnen, die durch das Schließen eines Primärstroms i_1 durch die Sekundärleitung fließt, und dadurch z. B. ein ballistisches Galvanometer aichen.

Normalien der Selbstinduktion und der wechselseitigen Induktion werden z. B. von Siemens & Halske in den Handel gebracht.

41. Die Kräfte in einem geschlitzten Kreise. Auf den Stirnflächen eines geschlitzten Kreises sitze permanenter Magnetismus und erzeuge die wahre Magnetisierung $\mathfrak{M}_w$.

Dann ist das vom wahren Magnetismus herrührende Feld (vgl. Nr. **28** (87))

$$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{H}_a = \frac{4\pi \mathfrak{M}_w \frac{l_i}{\mu}}{\frac{l_i}{\mu} + l_a}; \tag{143}$$

$$\mathfrak{H}_i = -\mathfrak{H}_a \frac{l_a}{l_i}. \tag{144}$$

Die Energie ist W_0

$$= \frac{\sigma}{8\pi}(\mu \mathfrak{H}_i^2 l_i + \mathfrak{H}_a^2 l_a) = \frac{\sigma}{8\pi}\mathfrak{H}_a^2\left(l_a + \frac{l_a^2 \mu}{l_i}\right) = \frac{2\pi \mathfrak{M}_w^2 \frac{l_i}{\mu} l_a \sigma}{\frac{l_i}{\mu} + l_a},$$

also

$$\delta W_0 = \frac{2\pi \mathfrak{M}_w^2 \frac{l_i^2}{\mu^2} \sigma}{\left(\frac{l_i}{\mu} + l_a\right)^2} \delta l_a = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}_0^2 \sigma \delta l_a,$$

also da $\partial A = \mathfrak{F} \delta l_a = -\delta W_0$ ist (vgl. Nr. **34** (102)),

$$\mathfrak{F} = -\frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}_0^2 \sigma. \tag{145}$$

Es wirkt also eine Anziehungskraft, welche die Schlitzweite zu verkleinern sucht und für jede Flächeneinheit den Betrag $\frac{1}{8\pi}\mathfrak{B}^2$ hat. Das ist die Maxwellsche Formel für die magnetischen Druckkräfte.[1]) Die Induktionslinien suchen sich also zu verkürzen.

1) Die Formel für den Maxwellschen Druck ist experimentell bestätigt worden von Taylor Jones, Ann. Phys. Chem. (3) **54**, 1895, 641; **57**, 1896, 258.

Ist das Feld durch den Strom i eines gleichmäßig herumgewickelten Solenoids erzeugt, so haben wir die Gleichungen

$$\mathfrak{H}_i l_i + \mathfrak{H}_a l_a = 4\pi i N, \qquad \mathfrak{B}_1 = \mu \mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_a,$$

woraus

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{H}_a = \frac{4\pi i N}{\frac{l_i}{\mu} + l_a}$$

folgt.

Die Energie ist

$$W_i = \frac{\sigma}{8\pi}(\mu \mathfrak{H}_i^2 l_i + \mathfrak{H}_a^2 l_a) = \frac{\sigma}{8\pi}\mathfrak{H}_a^2\left(l_a + \frac{l_i}{\mu}\right) = \frac{2\pi i^2 N^2 \sigma}{\frac{l_i}{\mu} + l_a}$$

$$\delta W_i = -\frac{2\pi i^2 N^2 \sigma}{\left(\frac{l_i}{\mu} + l_a\right)^2}\delta l_a,$$

also, da $\hat{c}A = +\delta W_i$ ist (vgl. Nr. **38** (133)),

$$\mathfrak{F} = -\frac{1}{8\pi}\mathfrak{B}_1^2 \sigma. \tag{146}$$

Ist das Feld gleichzeitig durch Ströme und permanente Magnete hervorgerufen, so überlagern sich Feld und Induktion einfach, es ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1$, dagegen ist nach Nr. **38** (132)

$$\hat{c}A = -\delta W_0 + \delta W_i + i\delta Q_0.$$

Nun ist

$$Q_0 = \mathfrak{B}_0 N \sigma = \frac{4\pi \mathfrak{M}_w \frac{l_i}{\mu}}{\frac{l_i}{\mu} + l_a} N\sigma,$$

d. h.

$$\delta Q_0 = -\frac{4\pi \mathfrak{M}_w \frac{l_i}{\mu} N\sigma}{\left(\frac{l_i}{\mu} + l_a\right)^2}\delta l_a,$$

und da $i = \frac{\mathfrak{B}_1}{4\pi N}\left(\frac{l_i}{\mu} + l_a\right)$ ist, so erhalten wir

$$i\delta Q_0 = -\frac{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{M}_w \frac{l_i}{\mu}\sigma}{\frac{l_i}{\mu} + l_a}\delta l_a = -\frac{1}{4\pi}\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B}_1 \sigma \delta l_a,$$

so daß $\partial A = -\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{B}_0^2 + \mathfrak{B}_1^2 + 2\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1)\sigma\,\delta l_a$ ist, also wiederum ein Zug

$$p = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{B}^2 \tag{147}$$

wirkt.

Die Tragkraft von Magneten und Elektromagneten folgt aus dieser Formel.

Die du Boissche Wage[1]) (vgl. Fig. 40) beruht auf dem Prinzip, daß p gemessen und nach (147) $\mathfrak{B}$ daraus berechnet wird. Der Zug wird in einem Schlußjoch mit zwei Schlitzen 1 und 2 dadurch gemessen, daß der obere Teil als Wagebalken an einer exzentrischen Schneide S sich befindet. Wegen der Verschiedenheit der Hebelarme ist ein Drehmoment vorhanden, welches durch ein Laufgewicht kompensiert werden kann. So kann $\mathfrak{B}^2$ nach absolutem Maß als Funktion von $\mathfrak{H}$ bestimmt werden.

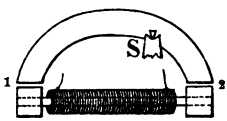

Fig. 40.

42. Das ballistische Galvanometer. Zu magnetischen Messungen wird häufig ein ballistisches Galvanometer gebraucht, d. i. ein Galvanometer, welches so langsam schwingt, daß man den Umkehrpunkt hinreichend genau ablesen kann. Zur Bestimmung von Stromimpulsen durch magnetische Induktion ist ein solches Instrument z. B. zu benutzen. Man hat zwei Typen ballistischer Galvanometer: 1. Nadelgalvanometer, bei denen der Strom in feststehende Spulen geschickt wird, so daß ein Magnetfeld entsteht, welches eine drehbar aufgehängte Magnetnadel ablenkt mit einem Drehmoment, welches durch Nr. **34** (117) gegeben ist; 2. Drehspulengalvanometer, auch Deprez-d'Arsonval-Galvanometer genannt, bei dem der Strom in eine Spule geschickt wird, die drehbar im Felde eines feststehenden permanenten Magneten sich befindet. Hier wirkt das in Nr. **39** (138) berechnete Drehmoment.

Bei magnetischen Messungen besitzen die Drehspulgalvanometer den Vorzug, daß sie durch fremde Magnetfelder nur sehr wenig gestört sind, um so weniger, je kräftiger das Feld der permanenten Magneten ist, weil das kleine störende Feld an der Stelle des Galvanometers gegenüber dem starken Felde des permanenten Magneten nur wenig in Betracht kommt.

1) H. du Bois, Zeitsch. f. Instrum.-Kunde **20**, 1900, 113 u. 129.

Da wegen dieser Vorteile bei magnetischen Untersuchungen fast nur das Deprez-d'Arsonvalgalvanometer benutzt wird, wollen wir uns mit der Theorie dieses Instruments allein beschäftigen.

In der Gleichgewichtslage befinde sich die Ebene der Spule parallel dem konstanten Magnetfelde. Schickt man einen Strom i in die Spule, die um den Winkel ϑ aus der Gleichgewichtslage abgelenkt sei, so wirkt nach Nr. 39 (138) ein Drehmoment auf die Spule von der Größe $i\mu H\sigma \cos\vartheta$. Ferner wirkt infolge der Direktionskraft D der Spulenaufhängung das Drehmoment $-D\vartheta$. Durch die Bewegung der Spule im Magnetfelde tritt noch ein anderes Drehmoment auf, welches seinen Grund in den entstehenden Induktionsströmen hat.

Nach der auf S. 98 abgeleiteten Formel (Lenzsche Regel) ist

$$\frac{\partial A}{dt} = \mathfrak{N}\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{1}{w}\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{w}\left(\frac{dQ}{d\vartheta}\right)^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2,$$

also

$$\mathfrak{N} = -\frac{1}{w}\left(\frac{dQ}{d\vartheta}\right)^2\frac{d\vartheta}{dt}$$

Nun ist

$$Q = \mu H\sigma \sin\vartheta,$$

also wird

$$\mathfrak{N} = -\frac{1}{w}\mu^2 H^2\sigma^2\cos^2\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}. \tag{148}$$

Bezeichnet man das Trägheitsmoment der Spule mit K, so lautet die Bewegungsgleichung, falls die Winkel ϑ nur klein sind,

$$K\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \sum\mathfrak{N} = -\frac{1}{w}\mu^2 H^2\sigma^2\frac{d\vartheta}{dt} - D\vartheta + i\mu H\sigma,$$

oder

$$K\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + k\frac{d\vartheta}{dt} + D\vartheta = i\mu H\sigma, \tag{149}$$

wo zur Abkürzung $k = \frac{\mu^2 H^2\sigma^2}{w}$ gesetzt worden ist.

Die Schwingungsdauer der Spule sei groß gegen die Dauer des durch die äußere elektromotorische Kraft hervorgerufenen Stromes i, dann wird ϑ noch nicht merklich von Null verschieden sein, wenn der gesamte Strom bereits durch das Galvanometer geflossen ist. Im ersten Stadium, in welchem der Strom noch

fließt, gilt also mit großer Näherung die Gleichung

$$K\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + k\frac{d\vartheta}{dt} = i\mu H\sigma. \tag{150}$$

Integrieren wir diese Gleichung nach t von 0 bis t_1, wo t_1 klein gegen die Schwingungsdauer ist, aber so groß, daß für $t > t_1$ der durch die äußere elektromotorische Kraft hervorgerufene Strom i schon wieder Null ist, so erhalten wir

$$K\frac{d\vartheta}{dt} = \mu H\sigma\int_0^{t_1} i\,dt = \mu H\sigma J, \tag{151}$$

wenn $J = \int i\,dt$ den Integralstrom bedeutet.

Im zweiten Stadium gilt dann die Gleichung

$$K\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + k\frac{d\vartheta}{dt} + D\vartheta = 0 \tag{152}$$

mit den Anfangsbedingungen für $t = 0$:

$$\vartheta = 0; \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\mu H\sigma J}{K} = C. \tag{153}$$

Die Gleichung (152) mit den Anfangsbedingungen (153) wird in der Theorie der unendlich kleinen Schwingungen behandelt, wir können uns demnach kurz fassen und werden uns in der Behandlungsweise den Ausführungen von Dießelhorst[1]) anschließen:

Setzt man $\vartheta = e^{\lambda t}$ in (152) ein, so zeigt sich, daß λ der Gleichung

$$K\lambda^2 + k\lambda + D = 0$$

zu genügen hat, d. h. es ist

$$\lambda_1 = -\frac{\pi}{\varepsilon T_0}(1 + \sqrt{1-\varepsilon^2}); \qquad \lambda_2 = -\frac{\pi}{\varepsilon T_0}(1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}),$$

wo $T_0 = \pi\sqrt{\frac{K}{D}}$ die (halbe) Schwingungsdauer des ungedämpften Systems und $\varepsilon = \frac{2\sqrt{KD}}{k}$ ist. $\varepsilon < 1$ entspricht dem aperiodischen,

1) H. Dießelhorst, Ann. Phys. **9**, 1902, S. 458; vgl. auch wegen der Theorie der Drehspulengalvanometer W. Jaeger, Ann. Phys. **21**, 1906, S. 64.

$\varepsilon > 1$ dem periodischen Fall, während $\varepsilon = 1$ der aperiodische Grenzfall heißt.

Im periodischen Zustand werden wir also besser

$$\lambda_1 = -\frac{\pi}{\varepsilon T_0}(1 + i\sqrt{\varepsilon^2 - 1}); \qquad \lambda_2 = -\frac{\pi}{\varepsilon T_0}(1 - i\sqrt{\varepsilon^2 - 1})$$

schreiben, da dann die Quadratwurzeln reell sind. Das allgemeine Integral lautet $\vartheta = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$ für $\varepsilon \gtrless 1$; die Konstanten bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen (153); wir erhalten somit

für $\varepsilon < 1$

$$\vartheta = -\frac{C\varepsilon T_0}{2\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left\{e^{-\frac{\pi t}{\varepsilon T_0}(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})} - e^{-\frac{\pi t}{\varepsilon T_0}(1-\sqrt{1-\varepsilon^2})}\right\}$$

(154)

für $\varepsilon > 1$

$$\vartheta = \frac{C\varepsilon T_0}{\pi\sqrt{\varepsilon^2-1}} e^{-\frac{\pi}{\varepsilon T_0}t} \sin\frac{\pi\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon T_0} t = Ge^{-\frac{\Lambda}{T}t}\sin\frac{\pi t}{T}.$$

Hier bedeuten T und Λ Schwingungsdauer und logarithmisches Dekrement.

Für $\varepsilon = 1$ ist das allgemeine Integral

$$\vartheta = (A + Bt)e^{-\frac{\pi t}{T_0}}$$

und mit Beachtung der Anfangsbedingungen

$$\vartheta = Cte^{-\frac{\pi t}{T_0}}. \tag{154'}$$

Im periodischen Falle ($\varepsilon > 1$) drücken sich die Schwingungsdauer T und das logarithmische Dekrement Λ durch T_0 und ε wegen (154) folgendermaßen aus

$$T = \frac{T_0\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}; \qquad \Lambda = \frac{\pi}{\varepsilon}\frac{T}{T_0} = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}.$$

Die Zeit t_1 der Umkehr des schwingenden Systems bekommt man, wenn man $\frac{d\vartheta}{dt}$ bildet und $= 0$ setzt; es wird

$$t_1 = -\frac{\varepsilon}{\pi}\,\text{lognat}\,F(\varepsilon)\,T_0, \tag{155}$$

wo

$$F(\varepsilon) = \left(\frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}} = e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\varepsilon^2-1}}$$

ist. Der erste Ausdruck ist für $\varepsilon < 1$, der zweite für $\varepsilon > 1$ reell. Für $\varepsilon = 1$ gehen beide Ausdrücke in $F(\varepsilon) = 1/e$ über.

Den Maximalausschlag ϑ_1 erhalten wir, wenn wir $t = t_1$ in den Formeln für ϑ setzen (155). Eine einfache mathematische Umformung ergibt in allen drei Fällen

$$\vartheta_1 = \frac{T_0 C}{\pi} F(\varepsilon). \tag{157}$$

In (153) finden wir den Wert von C und erhalten

$$\vartheta_1 = \frac{\mu H \sigma J}{\sqrt{KD}} F(\varepsilon).$$

Nun war zur Abkürzung $k = \frac{\mu^2 H^2 \sigma^2}{w}$ und $\varepsilon = \frac{2\sqrt{KD}}{k}$ gesetzt worden. Dadurch kann man H aus ϑ_1 eliminieren und erhält

$$\vartheta_1 = J \sqrt{\frac{2w}{\sqrt{KD}}} \frac{F(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{158}$$

Verlangt man, daß die Zeitdauer bis zum Erstausschlag t_1 (155) nicht zu klein, die Rückkehrzeit in die Ruhelage so klein wie möglich und die Empfindlichkeit ϑ_1/J (158) so groß wie möglich ist, so folgt aus den Untersuchungen von Dießelhorst, daß diese Bedingungen in der Nähe von $\varepsilon' = 1$, d h. im aperiodischen Grenzfalle am besten erfüllt sind. Man wird ein ballistisches Galvanometer also immer im aperiodischen Grenzfalle benutzen.

Aus der Formel für den Dämpfungsfaktor k sehen wir, daß k sehr stark vom Felde H abhängig ist; man kann also durch Variation von H bei verschiedenen äußeren Widerständen im Galvanometerkreise den aperiodischen Grenzfall erzielen. Man erreicht das, indem man an dem permanenten Magneten einen variablen magnetischen Nebenschluß anbringt (Deprez-Galvanometer von Siemens & Halske), der die Feldlinien zum Teil fortleitet, so daß weniger Feldlinien die Spule durchsetzen; allerdings läßt sich das nicht ganz ohne Verringerung der Empfindlichkeit bewirken.

Sachregister.

Absolutes Maß 6. 16.
Altern eines Magneten 59.
Ampère (Einheit) 6.

Brechung der Induktionslinien 32.

Cottonsche Wage 100.
Coulomb (Einheit) 17.
Coulombsches Gesetz 79.

Dekrement, logarithmisches 107.
Diamagnetismus 12. 87.
Dichte, freie 60.
—, induzierte 60.
—, wahre 60.
Dielektrizitätskonstante 63.
Dießelhorst 106.
Divergenz 15.
Drehmoment eines Ellipsoids 86.
Drehspulengalvanometer 104.
Duboissche Wage 104.

Eindeutigkeit 17.
Elektromotorische Kraft 71.
Ellipsoid im Magnetfelde 45.
Elliptische Koordinaten 40.
Energie, elektrische 72.
—, magnetische 69. 72. 93.
—, wechselseitige 92.
Entmagnetisierung 37.
Entmagnetisierungskoeffizient 38.
— von Ellipsoiden 47. 49.
Erdinduktor 13.
Erdmagnetismus 14.
Erregung, magnetische 11.

Faraday 10.
Feld, elektrostatisches 63.
—, magnetisches 1.
Feldstärke, magnetische 1. 2.
Ferromagnetismus 12. 50.

Galvanometer, ballistisches 1. 104.
Gauß 60.
Gauß (Einheit) 3.
Gaußsche Methode 81.
Geradliniger Strom 4.
Grenzbedingungen 31.

Hauptlagen 67.
Hohlkugel im Magnetfelde 44.
Hopkinsonsche Theorie 36.
Horizontalintensität 14. 82.
Hysteresis 52.
Hysteresiswärme 72.

Induktion 11.
Induktionsfluß 12.
Induktionsgesetz 9.
Jungfräuliche Kurve 50.
Joulesche Wärme 70.

Koepsel 97.
Koerzitivkraft 53.
Kommutierungskurve 51.
Körperlicher Winkel 25.
Kraft, elektromagnetische 91.
— auf ferromagnetische Körper 78.
— im geschlitzten Kreis 102.
— auf eine Kugel 86.
—, magnetische 69. 73.
—, magnetostatische 74.
— auf starre Körper 76. 83.
— auf Ströme 95.

Laplacesche Gleichung 22.
Leitfähigkeit, elektrische 11.
—, magnetische 33.
Lenzsche Regel 99.
Linienintegral der elektrischen Feldstärke 10.
— der magnetischen Feldstärke 5. 6.

Magnet, permanenter 58.
Magnetisierung von Ellipsoiden 48.
—, induzierte 58.
—, scheinbare 65.
—, wahre 57.
Magnetisierungsapparat von Koepsel 97.
Magnetisierungskonstante 12.
Magnetisierungskurve, Bestimmung der 53.
Magnetismus, freier 59.
—, wahrer 59.
Magnetometer 55.
Magnetomotorische Kraft 33.
Maxwell (Einheit) 17.
Maxwellscher Druck 102.
Maxwellsche Gleichung, erste 6.
— —, zweite 9.
Moment 67. 80. 82.
—, freies 83.
—, induziertes 83.
—, wahres 83.

Nachwirkung, magnetische 53.
Nebenschluß, magnetischer 108.

Oberflächenintegral 16.
Ohm (Einheit) 17.

Paramagnetismus 12. 87.
Permanenter Magnet 58.
Permanent magnetisierter Kreis 63.
— magnetisiertes Rotationsellipsoid 64.
Permeabilität 12.
— ferromagnetischer Körper 50.
— von Flüssigkeiten 90.
— permanenter Magnete 60. 65.
—, reversible 57.
Pole 66.
Potential, magnetisches 19.
Poynting 72.
Probespule 1.

Quincke 91.

Rechtsschraubung 3.
Rechtssystem 7.
Remanenz 53.
Reversible Änderungen 57.
Rotation 8.
Rotationsellipsoid im Magnetfelde 45.

Sättigung 53.
Scheerung 55.
Schirmwirkung 45.
Schlußjoch 36.
Schwingungsdauer eines Galvanometers 107.
Selbstinduktion 92. 100.
Solenoid 9.
—, geradliniges 26.
—, geschlossenes 32.
Solenoidalität 15.
Sperrfläche 20.
Stabmagnet 66.
Steighöhenmethode 90.
Strahlung 72.
Streuung 34.
Streuungskoeffizient 36.
Stromdichte 7.
Suszeptibilität 12.
—, reversible 57.

Tangentenbussole 25.
Toroid 33.

Volt (Einheit) 17.

Wechselseitige Induktion 93. 100.
Widerstand, elektrischer 11.
—, magnetischer 33. 34.
Winkel, körperlicher 25.

Zusatzfeld 30.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Abraham, Professor Dr., **M.**, Privatdozent an der Universität Göttingen, Theorie der Elektrizität. 2 Bände.

I. Band. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von Professor Dr. A. Föppl. 3. Auflage von Dr. M. Abraham. Mit 11 Figuren im Text. [XVIII u. 460 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. *M* 12.—

II. Band. Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von Dr. M. Abraham. [X u. 104 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. *M* 10.—

Bôcher, Dr. **Maxime**, Professor an der Harvard-Universität zu Cambridge, Mass. V. St. A., über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie. Mit einem Vorwort von F. Klein. Mit 113 Textfiguren. [VIII u. 258 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M* 8.—

Bucherer, Dr. **A. H.**, Privatdozent an der Universität Bonn, mathematische Einführung in die Elektronentheorie. Mit 14 Figuren im Text. [IV u. 148 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. *M* 3.20.

——— Elemente der Vektoranalysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. 2. Auflage. [VIII u. 103 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. *M* 2.40.

Burkhardt, Dr. **H.**, Professor an der Universität Zürich, Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung zur Beschreibung von Naturerscheinungen. Mit 38 Textfiguren. [XII u. 252 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. *M* 6.—

Ferraris, **Galileo**, weiland Professor an der Universität Turin, wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik. Nach den Vorlesungen über Elektrotechnik, gehalten in dem R. Museo Industriale zu Turin. Deutsch herausgegeben von Dr. Leo Finzi, Privatdozent an der Kgl. Technischen Hochschule zu Aachen. Mit 161 Figuren im Text. [XII u. 358 S.] gr. 8. 1901. In Leinwand geb. n. *M* 12.—

Fleming, Dr. **J. A.**, Professor der Elektrotechnik am University College zu London, elektrische Wellen-Telegraphie. Vier Vorlesungen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Professor Dr. E. Aschkinaß, Privatdozent an der Universität Berlin. Mit 53 Abbildungen. [IV u. 185 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M* 5.—

Föppl, Dr. **Aug.**, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu München, Vorlesungen über technische Mechanik. In 6 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band. Einführg. i. d. Mechanik. 3. Aufl. M. 136 Fig. i. T. [XVI u. 428 S.] 1905. n. *M* 10.—

II. — Graphische Statik. 2. Aufl. Mit 176 Fig. i. Text. [XII u. 471 S.] 1903. n. *M* 10.—

III. — Festigkeitslehre. 3. Aufl. Mit 83 Fig. i. Text. [XVI u. 434 S.] 1905. n. *M* 10.—

IV. — Dynamik. 2. Aufl. Mit 69 Fig. i. Text. [XV u. 506 S.] 1901. geb. n. *M* 12.—

V. — Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. Mit 44 Fig. i. Text. [XII u. 391 S.] 1907. n. *M* 10.—

VI. — Die wichtigsten Lehren der höheren Dynamik. [In Vorber.]

Gans, Dr. **R.**, Privatdozent an der Universität Tübingen, Einführung in die Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Mit 31 Figuren im Text. [X u. 98 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M* 2.80.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Hering, K., Ingenieur in Darmstadt, das 200jährige Jubiläum der Dampfmaschine 1706—1906. Eine historisch-technisch-wirtschaftliche Betrachtung. Mit 13 Figuren im Text. [IV u. 58 S.] gr. 8. 1907. geh. n. *M* 1.60.

Holzmüller, Professor Dr. **Gustav**, vorm. Direktor der Provinzialgewerbeschule zu Hagen i. W., die Ingenieurtechnik in elementarer Behandlung. 2 Teile. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Teil, enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Zentrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye. Mit 287 Figuren und zahlreichen Übungsaufgaben. [XI u. 340 S.] 1897. n. *M* 5.—

II. Teil, enthaltend das Potential und seine Anwendung auf die Theorie der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik. Mit 237 Figuren, zahlreichen Übungsbeispielen und einem Anhange über Maßeinheiten. [XVII u. 440 S.] 1898. n. *M* 6.—

Jahnke, Dr. E., Professor an der Königl. Bergakademie zu Berlin, Vorlesungen über die Vektorenrechnung mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Mit 32 Figuren im Text. [XII u. 236 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M* 5.60.

Kohlrausch, Geheimer Oberregierungsrat Dr. **Friedrich**, in Marburg, Lehrbuch der praktischen Physik. 10., vermehrte Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. Mit zahlreichen Figuren im Text. [XXVIII u. 656 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M* 9.—

——— kleiner Leitfaden der praktischen Physik. 2., vermehrte Auflage. 6.—10. Tausend. Mit zahlreichen Figuren im Text. [XVIII u. 260 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. n. *M* 4.—

Perry, Dr. **John**, F. R. S., Professor der Mechanik und Mathematik am Royal College of Science zu London, höhere Analysis für Ingenieure. Autorisierte deutsche Bearbeitung von Dr. Robert Fricke, ord. Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig, und Fritz Süchting, Direktor des städtischen Elektrizitätswerkes in Bremen. Mit 106 in den Text gedruckten Figuren. [X u. 423 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. *M* 12.—

Starke, Dr. **Hermann**, Professor an der Universität Greifswald, experimentelle Elektrizitätslehre mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse. Mit 275 Abbildungen im Text. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. *M* 6.—

Wallentin, Dr. J., Regierungsrat und Landesschulinspektor in Wien, Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. Mit 81 Figuren im Text. [X u. 444 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. *M* 12.—

Wien, Dr. W., Professor an der Universität Würzburg, über Elektronen Vortrag, gehalten auf der 77. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran. [28 S.] gr. 8. 1905. geh. n. *M* 1.—

B. G. Teubners Handbücher für Handel und Gewerbe

herausgegeben von

Dr. van der Borght Geh. Regierungsrat in Berlin
Dr. Schumacher Professor an der Universität Bonn
Dr. Stegemann Geh. Regierungsrat in Braunschweig

bieten dem Kaufma
mittel, um sich r
des Handels und
des Rechtes ein
wie es die erhöht
schaft

In der Sam

Anlage von Fabr
H. Haberstroh, E.
E. Görts und R. S
geh. M. 12.–, geb

Betrieb von Fa
Von F. W. R. Zimmer
A. Johanning, H. von Fran
berg und R. Stegeman
geh. M. 8.–, geb. M. 8.60.

Einführung in die Elektrotechnik. Von R. Rinkel.
geh. M. 11.20, geb. M. 12.—

Die Eisenindustrie. Von O. Simmersbach.
geh. M. 7.20, geb. M. 8.–.

Chemische Technologie. Von Fr. Heusler.
geh. M. 8.–, geb. M. 8.60.

Die
der W
geh. M.

Versicher
Von A. Manes.
geh. M. 9.40, geb. M. 10.–.

Einen ausführlichen Prospekt mit den Inhaltsangaben, einigen Textproben, sowie Abbildungen aus den bisher erschienenen Bänden versendet auf Verlangen umsonst und postfrei die Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3.

DUE MAY 8 1922

Phys 3409.08
Einfuhrung in die Theorie des Magn
Cabot Science
003451875
3 2044 091 960 062